Corso di Astrofisica per le Elementari :−))

Michele Andreoli 2004

■ Equazione differenziale per R[t]

Consideriamo una galassia di massa m, posizionata sul guscio piu' esterno dell'universo e che si allontana solidalmente col guscio. Assumiamo l'universo sferico, di raggio R[t] e di massa M. La velocita' della galassia sara' dunque R'[t]. L'energia meccanica E=cinetica+potenziale e' data dall'espressione

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dt}}\right)^2 - \frac{\mathrm{GMm}}{R(t)}$$

Se esplicitassimo rispetto alla velocita' v[t]=dR/dt, otterremo un'espressione del tipo:

In[70]:=

$$v[\mathrm{t\_}] := \sqrt{\frac{A}{R(t)} + B}$$

Le espressioni algebriche per parametri "A" e "B" sono facilmente calcolabili, ma non occorreranno, essendo questa una semplice simulazione numerica. E' sufficiente ricordare che "A" e' proporzionale ad M (e quindi e' sempre positiva), mentre "B" e' proporzionale all'energia E, e puo' dunque essere anche negativo.

Se A e B sono entrambi positivi,la radice non perde mai significato e l'universo e' sempre in espanzione (E=positiva); se invece B e' negativo, allora R non potra' superare il valore −A/B (verificalo). In questo punto la velocita' v(t) si annulla e la galassia inverte il moto (contrazione).

■ Parametri della simulazione

Scelgo due coppie di valori qualsiasi per A e B; una per il caso a perenne espansione (B>0) ed una per il caso a contrazione (B<0):

In[417]:=
```
simul1 = { A → 1, B → 0.1};
simul2 = { A → 1, B → -0.3};
```

Nella simulazione, la massa M viene mantenuta costante, anche se questo non puo' essere vero alla nascita dell'universo (universo dominato dalla radiazione). In questo caso, occorrerebbe assumere che M ha andamento del tipo 1/R, ma qui non viene fatto.
Naturalmente, i valori di A e B sono attribuiti casualmente, e non hanno attinenza con i valori reali dell'Universo corrente.

Soluzione 1: eterna espansione

In[76]:= `v[t] /. simul1`

Out[76]= $\sqrt{0.1 + \frac{1}{R[t]}}$

In[164]:=
```
r[t_] =
  R[t] /. NDSolve[{R'[t] == v[t] /. simul1, R[0] == 1}, R[t], {t, -10, 10}] // First // Re;
```

Nota1: Si e' assunto r=1 per t=0 (cioe' oggi). Per avere r[t] in valori reali, basta moltiplicare r[t] per il raggio attuale stimato dell'universo.

(*Mathematica* fornisce la risposta in forma di funzione interpolante. Per vedere com'e' fatta r[t] vai piu' sotto, nella parte del grafico).

■ Eta' dell'universo

Per determinare l'eta' attuale dell'universo, dovremmo cercare il valore di t nel passato (t<0) per il quale il raggio e' nullo: r[t]=0

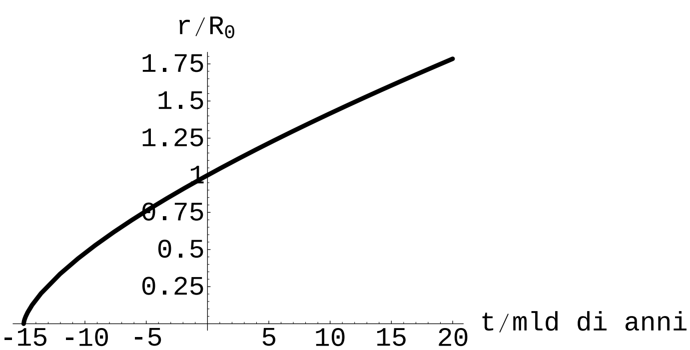
In[167]:=
```
T0 = -t /. FindRoot[r[t] == 0, {t, 0}]
```

Out[167]=
```
0.647673
```

Anche qui valgono considerazioni analoghe: se vogliamo avere il tempo in mld di anni e' sufficiente effettuare una scalatura dei tempi: basta dividere t per T_0 e moltiplicare per l'eta' effettiva dell'universo in mld di anni (assumo 15 mld di anni, per fare cifra tonda).

■ Grafico funzione R[t]

In[168]:=
```
Plot[r[t * T0 / 15], {t, -15, 20},
  AxesLabel -> {"t/mld di anni", "r/R0"}, PlotStyle -> Thickness[0.01]]
```



Out[168]=
```
- Graphics -
```

■ Costante di Hubble (che non e' costante ...)

La "costante" di Hubble e' definita come $H(t) = \frac{r'(t)}{r(t)}$. Essendo r[t] definita in maniera non analitica, sostituiro' la derivata mediante un rapporto incrementale:

In[200]:=
```
dt = 0.01; Clear[H];
H[t_] = (r[t + dt] - r[t]) / (dt * r[t]);
```

Alcuni valori di H[t] per tempi "futuri" (fino a due volte l'eta' dell'universo) non scalati:

In[202]:=
```
Table[ H[t], {t, 0, 2*T0, 0.2}]
```

Out[202]=
```
{1.04633, 0.80272, 0.651779, 0.549039, 0.474567, 0.418095, 0.373789}
```

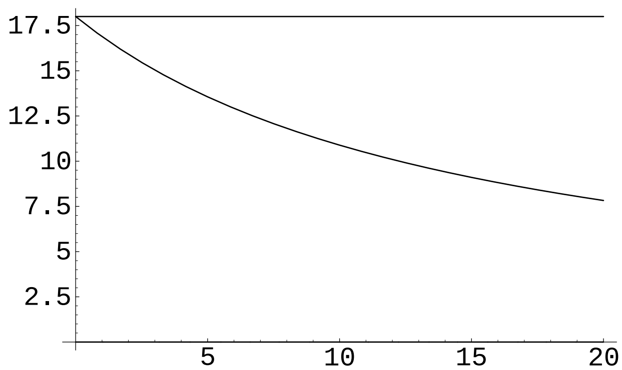
■ Grafico di H(t) scalato

Come per le altre grandezze, anche H(t) andrebbe "scalata" per ottenere i valori nelle unita' (Km/s)/anni−luce. Assumendo un valore attuale di H=18 (tanto per fare un esempio), bastera' prendere:

In[208]:=
```
Clear[h]
h[t_] = 18*H[t*T0/15]/H[0];
```

Notare che per t=0 si ottiene 18 e che t e' in mld di anni.

In[210]:=
```
Plot[ {0, h[0], h[t] }, {t, 0, 20}]
```



Out[210]=
```
- Graphics -
```

Soluzione 2: universo che si contrae

Avendo preso solo la soluzione col "+" esplicitando R'[t], la nostra equazione differenziale puo' descrivere soltanto la parte espansiva, e non la parte contrattiva, per la quale la velocita' e' negativa Chiamero' r1[t] la parte espansiva, ed r2[t] la parte contrattiva. r2[t] si potrebbe trovare sfruttando la simmetria temporale, ma qui si preferira' risolvere l'eq' differenziale nuovamente.

■ Parte "espansiva"

In[278]:=
```
v[t] /. simul2
```

Out[278]=

$$\sqrt{-1 + \frac{1}{R[t]}}$$

In[440]:=

```
Clear[r1, t];
r1[t_] =
  R[t] /. NDSolve[ {R'[t] == v[t] /. simul2, R[0] == 1}, R[t], {t, -10, 9}] // First // Re;
```

■ Eta' dell'universo:

In[442]:=

```
T0 = -t /. FindRoot[ r1[t] == 0, {t, 0}]
```

Out[442]=

```
0.738708
```

■ Istante di inizio della contrazione

La contrazione ha inizio quando la velocita' dR/dt si annulla; e cio' avviene quando il radicando si annulla. Occorre trovare il t per cui R[t]=−A/B.

In[443]:=

```
T1 = t /. FindRoot[ r1[t] == Abs[A / B] /. simul2, {t, 0}]
```

Out[443]=

```
8.82133
```

In[444]:=

```
Table[r1[t], {t, -T0, T1}]
```

Out[444]=

$\{-3.34242\times10^{-9}$, 1.20362, 1.80488, 2.24337, 2.58022, 2.84108, 3.03956, 3.18368, 3.27831, 3.32628$\}$

Osservando che:

In[439]:=

```
T1 / T0
```

Out[439]=

```
11.9416
```

la contrazione inizierebbe a circa 12 volte l'eta' attuale dell'universo.

■ Parte "contrattiva"

L'equazione differenziale e' la stessa, ma la velocita' e' presa ora col segno negativo:

In[454]:=

```
Clear[r2, t];
r2[t_] =
  R[t] /. NDSolve[ {R'[t] == -v[t] /. simul2, R[0] == r1[T1]}, R[t], {t, 0, T1 + T0}] //
    First // Re;
```

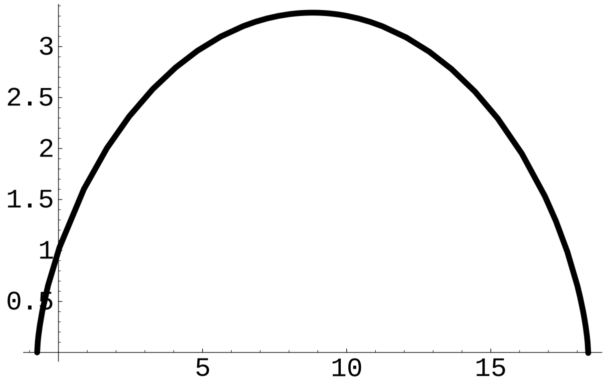
■ Funzione completa

In[456]:=

```
r[t_] := If[ t ≤ T1, r1[t], r2[t - T1]]
```

In[457]:=

```
Plot[r[t], {t, -T0, 2 T1 + T0},
  PlotStyle → Thickness[0.01]]
```



Out[457]=

```
- Graphics -
```