ALCUNI TEOREMI SU CONTINUITÀ, DERIVATE E INTEGRALI

MICHELE ANDREOLI

Liceo Scientifico "Ulisse Dini"
2021
versione 3.0

Sommario. Dimostrazioni semplificate dei principali teoremi sulle funzioni continue e calcolo differenziale. Esse non sostituiscono il libro di testo, ma possono essere un ausilio allo studio.

Indice

1. Alcune definizioni

Definizione. Sia A un insieme numerico ordinato. Il *massimo e il minimo* di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ sono definiti come:

$$max[A] = \{m \in A : m \geq a, \forall a \in A\} \tag{1.1}$$

$$min[A] = \{m \in A : m \leq a, \forall a \in A\} \tag{1.2}$$

NOTA INFORMATIVA: questo documento non è stato redatto con Microsoft Word, ma col sistema di stampa denominato TEX (pronuncia: *tek*), lo stesso usato per la produzione di documentazione scientifica ad alta qualità tipografica. La maggior parte delle pubblicazioni scientifiche al mondo, compresi molti libri di matematica che comprerete all'Università, è realizzata con il TEX. TEX, e i suoi derivati quali LATEX (che sto ora usando), a differenza di MS Word, è un sofware libero e gratuito, creato da *Leslie Davenport,* e liberamente distribuito su Internet.

Notare che, per come sono definiti, il max e il min, *se esistono*, devono appartenere all'insieme stesso. Se però l'insieme è fatto di infiniti elementi, non è detto che ve ne sia uno classificabile come "il più piccolo" o il "più grande". Dunque, il max e il min possono *non esistere.*

Esempio 1. L'insieme $\{x \geq 2\}$ ha come minimo il valore 2, ma non ha un massimo.

Esempio 2. L'insieme $\{2 < x \leq 3\}$ ha come massimo il valore 3, ma non ha un minimo.

Definizione. Sia A un insieme numerico ordinato. *L'estremo superiore e l'estremo inferiore* di $A \subset \mathbb{R}$ sono definiti come:

$$sup[A] = min\{x \geq a, \forall a \in A\} \tag{1.3}$$

$$inf[A] = max\{x \leq a, \forall a \in A\} \tag{1.4}$$

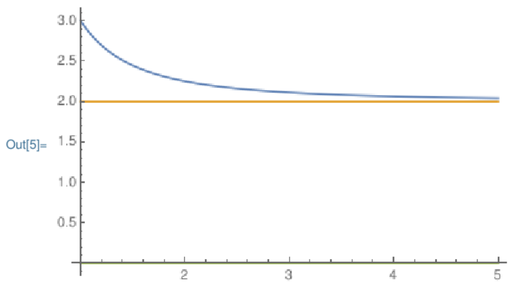
- In termini più tecnici, si dice che il *sup* è il minimo dei "maggioranti", mentre *l'inf* è il massimo dei "minoranti".
- Essi esistono esempre, ma *di regola* non appartengono all'insieme. Essi sono, in un certo *ai bordi* di esso.
- Un insieme A si dice *illimitato* superiormente (o inferiormente) se il *sup* (o *l'inf*) valgono infinito.
- Se il sup (o l'inf) appartiene all'insieme, allora esso è detto *massimo assoluto* (o rispettivamente *minimo assoluto*) dell'insieme.

Esempio 3. L'insieme $\{2 < x \leq 3\}$ ha come *sup* il valore 3, e come *inf* il valore 2. Il *sup* appartiene all'insieme, per cui è anche il *max.* Il minimo non esiste.

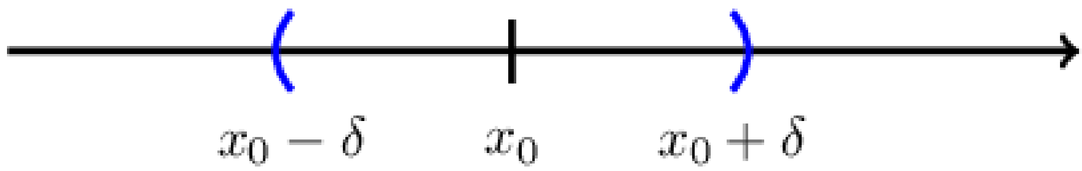
Esempio 4. Esempio: Prendiamo l'insieme

$$A = \{2 + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\} \text{ (vedi fig)}$$

dove i valori di A sono sulla curva per valori interi dell'asse x. Si vede subito che $sup(A) = 3$, e che $inf(A) = 2$. Mentre il *sup* appartiene all'insieme (per n=1), per cui è anche il *max*, *l'inf* no, anche se ci si avvicina per $n \to \infty$. Dunque $max(A) = 3$ ma il $min(A)$ non esiste.



Definiamo *l'immagine* di una funzione:



Intorno di un numero x_0 di raggio δ

Definizione. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su $I \subset \mathbb{R}$. Definiamo *immagine di I secondo f,* l'insieme:

$$f(I) = \{f(x), \forall x \in I\} \tag{1.5}$$

Definiamo ora il concetto di *intorno sferico di un punto.*

Definizione. L'intorno "sferico" di x_0 di raggio δ è il sottoinsieme:

$$I_\delta(x_0) = [x_0 - \delta, x + \delta] \tag{1.6}$$

In sostanza, si tratta di un intervallo centrato in x_0 e ampio 2δ, ma in 2D è un cerchio e in 3D una sfera di raggio δ

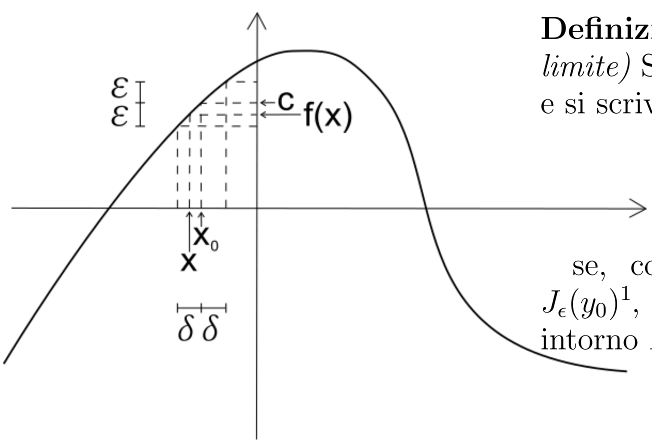
E' possibile anche parlare di *intorno di infinito*:

Definizione. Intorni di ∞ e $-\infty$:

$$I_r(\infty) = [r, \infty] \tag{1.7}$$

$$I_r(-\infty) = [-\infty, r] \tag{1.8}$$

2. Limite e Continuità



Definizione. (*definizione topologica di limite)* Si dice che f(x) ha limite y_0 in x_0 e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \tag{2.1}$$

se, comunque si scelga un intorno $J_\epsilon(y_0)$[1], è sempre possibile *trovare* un intorno $I_\delta(x_0)$ tale che:

$$f(I) \subset J \tag{2.2}$$

[1]anche infinitesimo ...

Normalmente, nei libri di scuola, i limiti vengono definiti con la classca notazione $\epsilon - \delta$, forse più espressiva ma molto meno compatta: per i limiti "al finito":

$$\forall \epsilon, \exists \delta : |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - y_0| \leq \epsilon$$

mentre, per il limite $x \to +\infty$ avremo:

$$\forall \epsilon, \exists r : x \geq r \implies |f(x) - y_0| \leq \epsilon$$

mentre, per il limite $x \to -\infty$ avremo:

$$\forall \epsilon, \exists r : x \leq -r \implies |f(x) - y_0| \leq \epsilon$$

Teorema. *Il limite, se esiste, è unico.*

Dimostrazione. Se i limiti fossero due, y_1, y_2, scegliamo due J_1, J_2 che non si intersecano. Per ipotesi, devono esistono I_1, I_2 tali che :

$$J_1 \cap J_2 = \emptyset \tag{2.3}$$

$$f(I_1) \subset J_1 \tag{2.4}$$

$$f(I_2) \subset J_2 \tag{2.5}$$

questo vuol dire $f(I_1 \cap I_2) \subset J_1 \cap J_2$. Ma questo è impossibile, perchè i due J non hanno punti in comune (*contraddizione)* □

Definizione. (*continuità*) Se esiste $f(x_0)$ e se è uguale al limite:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

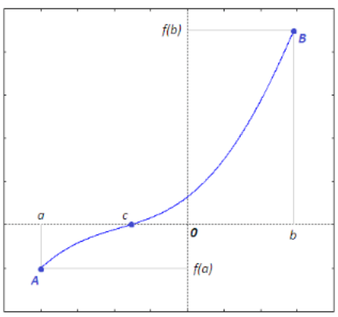
allora di dice che la funzione $f(x)$ *è continua in* x_0.

3. Permanenza del segno

Teorema. *Se f(x) è continua e non nulla in un punto x_0, esiste un intorno del punto stesso in cui la funzione assume sempre lo stesso segno.*

Dimostrazione. Assumiamo che $y_0 = f(x_0)$ sia positivo. Prendiamo l'intorno $J_{y_0}(y_0) = [0, 2y_0]$. Dato che, per ipotesi, esiste il limite in x_0, deve esiste un intorno $I(x_0)$ per il quale $f(I) \subset [0, 2y_0]$, e quindi f(x) è positiva in tutto I. La dimostrazione è analoga se y_0 è negativo. □

4. Esistenza degli zeri

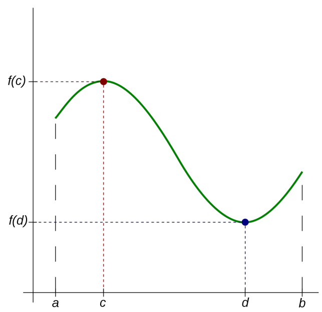


Teorema. *Se f(x) è continua nell'intervallo chiuso [a,b], e se $f(a)f(b) < 0$, allora in (a,b) vi è un punto $x = c$ in cui $f(c) = 0$.*

Dimostrazione. Consideriamo per semplicità il caso considerato in figura. Sia $c = sup\{x \in [a,b] : f(x) \leq 0\}$ l'estremo superiore dell'insieme dei punti su cui f(x) è negativa. Se fosse $f(c) > 0$, lo sarebbe anche in un intorno di c (*teorema permanenza del segno*), quindi anche per alcuni punti "al di sotto" *di c*. Ma questo è impossibile, perchè, per definizione di estremo superiore, al di sotto c la funzione dev'essere negativa. Assumiamo invece che $f(c) < 0$. Sempre per il *teorema della permanenza del segno*, la funzione dovrà essere negativa anche per alcuni punti "al di sopra" di c. Ma quest è impossibile, perchè, per definizione, c era il massimo valore per cui questo poteva succedere. Ne consegue che dev'essere per forza $f(c) = 0$. □

5. Teorema di Weiestrass

Teorema. *Se f(x) è continua nell'intervallo chiuso I=[a,b], allora f(x) ammette almeno un punto di* massimo *e un punto di* minimo *assoluto nell'intervallo.*



Dimostrazione. Consideriamo l'immagine della funzione $f(I)$. Essendo l'insieme I limitato, ed essendo f(x) continua, anche f(I) è un insieme limitato, cioè i suoi *sup* e *inf* sono finiti. Se riuscimo a dimostrare che essi appartengono ad f(I), allora automaticamente (per quanto visto prima nel capitolo "Alcune definizioni") essi sono il *max* e il *min* (rispettivamente).

Per dimostrare che $M = sup(f(I))$ deve per forza appartenere ad f(I), procediamo così. Consideriamo la funzione ausiliaria g(x) definita anch'essa su I:

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

e assumiamo per assurdo che M non appartenga ad $f(I)$.

E' facile comprendere che, con questa assunzione, l'insieme $g(I)$ è limitato: basta pensare che il denominatore non si annulla e quindi non $g(x)$ balza mai all'∞.

Chiamiamo $k = sup(g(I))$. Essendo $g(x) \leq k$, se ne deduce che:

$$f(x) \leq M - \frac{1}{k}$$

ma questo contriddice il fatto che il $sup(f)$ è proprio M, e non $M - \frac{1}{k}$. □

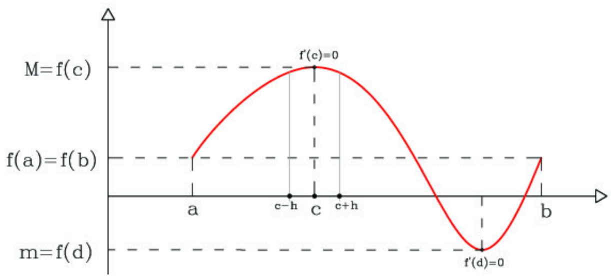
6. Valori intermedi o di Bolzano

Teorema. *(teorema dei valori intermedi) Se una funzione f(x) è continua nell'intervallo chiuso I=[a,b], allora essa assume tutti i valori compresi tra il suo minimo assoluto ($m = min(f)$) e il suo massimo assoluto ($M = max(f)$).*

Più in generale: se una funzione è continua in un intervallo, se assume due valori, deve assumere tutti quelli compresi tra questi: una funzione continua non può fare "salti".

7. Teorema di Rolle

Teorema. *Se una funzione è continua in un intervallo chiuso I=[a,b], derivabile nell'intervallo aperto (a,b) e assume valori uguali f(a)=f(b) negli estremi, allora esiste almeno un punto c interno ad (a,b) in cui la derivata si annulla, cioè $f'(c) = 0$ (punto critico o stazionario).*



Interpretazione grafica: c'è almeno un punto nell'intervallo dove la tangente è orizzontale

Dimostrazione. Essendo $f(x)$ continua ed essendo $I = [a, b]$ limitato, per il teorema di Weiestrass anche l'insieme $f(I)$ è limitato ed ammette massimo (M) e minimo (m) assoluti. Questi valori non possono essere tutti e due negli estremi $x = a$ o $x = b$, altrimenti $M \equiv m$ e la funzione sarebbe costante: il teorema sarebbe banalmente soddisfatto in tutti i punti. Escludiamo quindi questo caso, e assumiamo che il punto di massimo sia $x = c$, all'interno dell'intervallo [a,b]. Consideriamo i rapporto incrementale $g(h)$ così definito:

$$g(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Notare che il numeratore della frazione è sempre negativo, perchè $f(c)$ (essendo il massimo) in quella zona è più grande di tutti gli altri valori $f(x)$.

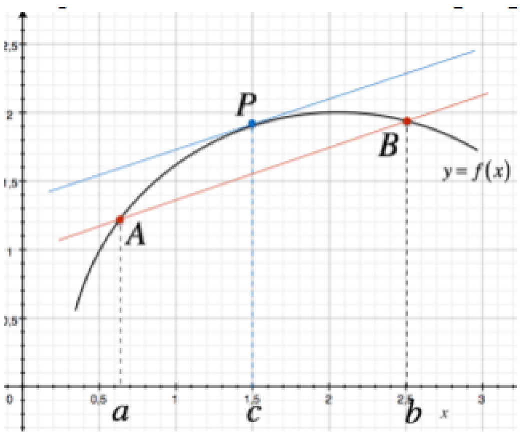
Ne consegue che il limite sinistro per $h \to 0$, l_-, è positivo (o nullo), e limite destro, l_+,è negativo o nullo. Il limite per $h \to 0$, però, deve esistere e deve valere $f'(c)$, perchè per ipotesi la funzione f(x) *è derivabile* nell'intervallo aperto (a,b). Dunque, i limiti sinistro e destro devono essere uguali:

$$l_+ = l_- = f'(c).$$

Ma questa relazione è possibile solo se tutti e due i limiti sono nulli e quindi $f'(c) = 0$. □

8. Teorema di Lagrange

Teorema. *Se una funzione è continua in un intervallo chiuso I=[a,b], derivabile nell'intervallo aperto (a,b), esiste almeno un punto c interno ad (a,b) in cui* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



L'interpretazione geometrica è immediata: *esiste almeno un punto P, tra i punti estremi A e B, in cui la retta tangente è parallela alla secante AB (vedi fig).*

Dimostrazione. Sia $y = r(x)$ la retta secante AB. Notare che $r'(x)$ è costante ed è uguale a $m_{AB} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, il coefficiente angolare della secante AB.

Definiamo ora la funzione:

$$g(x) = f(x) - r(x)$$

Dato che curva e retta coincidono negli estremi), si ha che $g(a) = g(b) = 0$ e, essendo $g(x)$ derivabile nell'aperto (a,b) e continua nel chiuso [a,b], si può applicare ad essa il *teorema di Rolle*: esiste dunque un punto dentro l'intervallo $x = c$ in cui $g'(c) = 0$.

Ma

$$g'(c) = f'(c) - r'(c) = f'(c) - m_{AB} = 0$$

da cui ricaviamo

$$f'(c) = m_{AB}$$

che è la nostra tesi. □

9. Teorema di Cauchy

Questo teorema generalizza il Teorema di Lagrange nel caso di due funzioni, ma lo si trova usato molto meno spesso. Purtroppo, la dimostrazione appare poco intuitiva, artificiosa, e si dimentica facilmente. Ma non ho trovato niente di meglio.

Teorema. *Siano f(x) e g(x) due funzioni continue nell'intervallo chiuso I=[a,b] e derivabile nell'intervallo aperto (a,b). Allora allora esiste almeno un punto c interno ad (a,b) in cui:*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Dimostrazione. Definiamo la funzione $h(x)$:

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

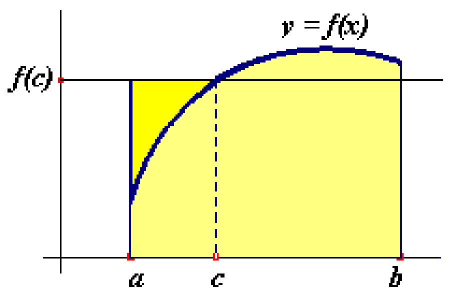
Esattamente come $f(x)$ e $g(x)$, anche $h(x)$ è continua sul chiuso e derivabile sull'aperto. Inoltre, con una breve verifica, si dimostra che $h(a) = h(b)$, e che quindi essa soddisfa il *Teorema di Rolle.* Esiste dunque un punto x=c in cui $h'(c) = 0$. Se calcoli la derivata $h'(x)$, vi sostituisci $x = c$, ed espliciti rispetto a $f'(c)/g'(c)$, trovi la tesi. □

10. Valor medio Integrale

Definizione. Sia f(x) una funzione continua sull' intervallo chiuso I=[a,b]. Definiamo *"media integrale di $f(x)$ su I" il valore μ così definito:*

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x) \cdot dx}{b - a} \tag{10.1}$$

Interpretazione geometrica: l'area sotto la curva $\int_a^b f(x) \cdot dx$ è equivalente a quella di un rettangolo di base $b - a$ e altezza μ.



Teorema. *Sia f(x) una funzione continua sull' intervallo chiuso I=[a,b]. Allora esiste almeno un punto c interno ad (a,b) tale che:*

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) \cdot dx}{b - a} = \mu \tag{10.2}$$

L'interpretazione: *esiste un punto $x = c$ in cui $f(x)$ assume proprio il valore medio integrale μ (vedi fig).*

Dimostrazione. (laboriosa). Definiamo la funzione integrale:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\dot{d}t$$

Essa rappresenta l'area compresa sotto la curva tra a ed x ed è una funzione continua e derivabile. Infatti, la sua derivata, detta $G(t)$ la primitiva di $f(t)$, vale:

$$F'(x) = D[G(x) - G(a)] = G'(x) = f(x)$$

Per il *teorema di Lagrange,* esiste c in (a,b) tale che:

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

Ma $F'(c) = f(c)$, F(b) è tutto l'integrale e $F(a) = 0$, per cui:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) \cdot dx}{b - a}$$

che è la nostra tesi. □

Un tentativo di dimostrazione più intuitiva:

Dimostrazione. (*alternativa*) Essendo $f(x)$ continua su un intervallo chiuso $[a, b]$, essa ammette minimo m e massimo M (assoluti) (*teorema di Weiestrass*), per cui:

$$m \leq f(x) \leq M$$

in tutto l'intervallo. Se ora integriamo su [a,b] i tre membri delle disequazioni, otteniamo:

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \leq M \cdot (b - a)$$

A questo punto, dividiamo tutto per $b - a$:

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \leq M$$

Intanto, questo dimostra che il valor medio integrale μ è compreso tra il minimo e massimo (assoluto) di $f(x)$, come dev'essere per ogni valor medio sensato. Per il *teorema dei valori intermedi*, la funzione, da qualche parte, deve assumere il valore intermedio μ, per cui esiste $x = c$ nel quale

$$f(c) = \mu$$

[2] □

[2]Se il punto di massimo era in un estremo, avremmo potuto usare il punto di minimo $x = d$,e la dimostrazione era del tutto simile.