Divagazioni sul problema del canguro

Michele Andreoli < *m.andreoli@tin.it*>

Un canguro si sposta, avanti e indietro, lungo una scala. Gli spostamente "relativi" del canguro (cioe' i salti in avanti,o all'indietro) formano la successione:A={+3,-1,+5,-3,+7,-5...}: 3 passi avanti, 1 indietro, 5 avanti, 3 indietro,etc. Su quale gradino si trovera' il canguro dopo 100 salti?

Ci sono sicuramente tanti metodi ad hoc per risolvere rompicapo come questi. Piu' interessante e', invece, cogliere l'occasione del problema e tentare di generalizzarlo, usando il software *Mathematica* come strumendo di indagine. L'idea di fondo e' quella di analizzare la successione delle posizioni del canguro come fosse un "segnale discreto" e applicare ad esso i tipici strumenti dei segnali discreti: la Trasformata Zeta, le funzioni generatrici, le serie, etc.

Funzioni generatrici e Successioni

Ad ogni successione A_n possiamo associare, in modo del tutto formale (cioe' senza riguardi per le questioni della convergenza) la funzione:

$$A(x\_) := \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, x^n = A_0 + A_1\, x + A_2\, x^2 + \ldots$$

Se si pone z=1/x, A(x) non e' altro che la cosiddetta trasformata zeta della successione stessa. Ricavare la successione A_n a partire dalla funzione A(x) non e' affatto difficile: dalla teoria degli sviluppi di Taylor si sa, infatti, che $A_n = A^{(n)}(0) / n!$, per cui basta derivare n volte A(x). Qualche esempio: alla successione H={1,1,1..}, alla successione G={0,1,2,3...}, e alla successione P={1,0,1,0,1,0 ...} (1 sui pari, 0 sui dispari) sono associate le funzioni generatrici:

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}; \qquad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n = \frac{x}{(x-1)^2}; \qquad P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2\,n} = \frac{1}{1-x^2}$$

Ancora piu' interessanti sono le successioni periodiche, tipo A={1,2,3,1,2,3,1,2,3, ...}. In questi casi e' possibile determinare la funzione generatrice raggruppando le varie potenze ed utilizzando lo sviluppo della serie armonica (la stessa usata per H(x)):

$$\left(1+2\,x+3\,x^2\right)+x^3\left(1+2\,x+3\,x^2\right)+x^6\left(1+2\,x+3\,x^2\right)+\ldots = \left(1+2\,x+3\,x^2\right)\frac{1}{1-x^3}$$

Somme parziali di una serie

Sia B_n la successione delle somme parziali della successione A_n: B_n e' quindi la somma dei primi n+1 termini di A_n:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} A_k = A_0 + A_1 + \ldots A_n$$

Sia ad A_n che a B_n possiamo associare la loro funzione generatrice A(x) e B(x). Che legame ci sara' tra le due funzioni? Si puo' dimostrare che B(x) e' proprio A(x)/(1-x):

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{n=0} A_n\, x^n}{1-x} &= A_0 + (A_0+A_1)\,x + (A_0+A_1+A_2)\,x^2 + (A_0+A_1+A_2+A_3)\,x^3 + \\ &(A_0+A_1+A_2+A_3+A_4)\,x^4 + (A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+A_5)\,x^5 + \\ &(A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6)\,x^6 + (A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7)\,x^7 + \\ &(A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7+A_8)\,x^8 + \\ &(A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7+A_8+A_9)\,x^9 + O[x]^{10}\end{aligned}$$

un risultato noto dalla Teoria dei Segnali Discreti. Per convincersene, basterebbe moltiplicare alcuni termini della serie $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ e della serie $A(x) = A_0 + A_1\,x + A_2\,x^2 + \ldots$, e raccogliere i termini corrisponenti alle medesime potenze.

- **Esempio di applicazione**

Per quanto visto prima, alla successione degli interi {1,2,3,4...} va associata la funzione $x/(1-x)^2$. Alle sue somme parziali dovremo quindi associare la funzione $x/(1-x)^2$. Sviluppando in serie di Taylor quest'ultima dovremmo trovare che i coefficienti dello sviluppo soddisfano la famosa formula di Gauss n(n+1)/2. E infatti:

$$\frac{x}{(1-x)^3} = x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + 15x^5 + 21x^6 + 28x^7 + 36x^8 + 45x^9 + O\left(x^{10}\right)$$

Il coefficiente di x^5 (15) e' proprio 5*6 / 2 e corrisponde alla somma dei numeri 1,2,3,4,5. E' facile generalizzare il metodo al calcolo delle somme dei quadrati, delle somme dei soli pari, o dei soli dispari, etc.

- **Il problema del canguro (finalmente!)**

Gli spostamenti relativi del canguro formano la successione: A={+3,-1,+5,-3,+7,-5 ... }. Le posizioni assolute, istante per istante, non sono altro che le somme parziali B di questa successione. La costruzione della funzione A(x) non e' difficile: basta pensare che alle potente pari x^{2k} va associato il coefficiente 2k+3 e alle potenze dispari x^{2k+1} il coefficiente -(2k+1), con k=0,1,2,3, ... :

$$A(\text{x\_}) := \sum_{k=0}^{\infty}(2k+3)\,x^{2k} - \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\,x^{2k+1}$$

Utilizzando le funzioni generatrici H(x),G(x) e P(), date precedentemente, si ha:

$$A(x) = \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2} =$$
$$3 - x + 5x^2 - 3x^3 + 7x^4 - 5x^5 + 9x^6 - 7x^7 + 11x^8 - 9x^9 + 13x^{10} - 11x^{11} + \ldots$$

Le somme parziali avranno quindi come generatrice B=A/(1+x):

$$B(\text{x\_}) := \frac{A(x)}{1-x} = \frac{x^2+2x+3}{(x^2-1)^2}$$

e B_n , che ci da la posizione "istantanea" del canguro al salto n, non e' altro che il coefficiente che moltiplica x^n seguente sviluppo:

$$\text{B[x]} = 3 + 2x + 7x^2 + 4x^3 + 11x^4 + 6x^5 + 15x^6 + 8x^7 + 19x^8 + 10x^9 + 23x^{10} +$$
$$12x^{11} + 27x^{12} + 14x^{13} + 31x^{14} + 16x^{15} + 35x^{16} + 18x^{17} + 39x^{18} + 20x^{19} + \ldots$$

Volendo, potremmo definire una funzione che ci da' la posizione al salto n-esimo, utilizzando il fatto che il coefficiente che mi interessa e' strettamente legato al coefficiente di Taylor e quindi alla derivata n-esima:

$$\text{posizione}(\text{n\_}) := \frac{\frac{\partial^n B(x)}{\partial x^n}}{n!} \,/.\, x \to 0$$

Dopo 100 passi (compreso il primo, il passo 0) il canguro e' sullo scalino 203. Infatti:

```
posizione[100]
```

203