Sul metodo dei trapezi

sperimentazione sull'algoritmo e sul controllo degli errori

M. Andreoli

Il modulo di programma

La seguente funzione ritorna 4 numeri: il valore approssimato dell'integrale, il valore "vero", l'errore assoluto (vero-approx) e l'errore teorico: 1/ 12*h^3* Max(f'')*n.

```
Clear[trapezi]
trapezi[f_, a_, b_, n_] := Module[ {i, r = 0, h, err = 0},
  h = (b - a) / n ;  (* calcolo del passo di integrazione *)
  r = 1 / 2 * ( f[a] + f[b]);  (* media del primo e ultimo punto *)
  err = 1 / 12 * h^3 * Abs[ f''[a]] + 1 / 12 * h^3 * Abs[ f''[b]];
  For[i = 1, i <= n - 1, i = i + 1,
      r = r + f[a + i * h] ; err = err + 1 / 12 * h^3 * Abs[ f''[a + i * h]]
  ];
     (* tabella: valore approx,
  valore vero, errore assoluto , errore teorico *)
   app = r * h;  vero = Integrate[f[x], {x, a, b}];
  (* Print[{ r*h, vero, Abs[vero-app],err} //N] *)
  { "approx=", r * h, "vero=", vero,
    "err-vero=", Abs[vero - app], "err-teorico=", err, "n=", n} // N
 ]
```

Prove

Proviamo la formula dei trapezi su alcune funzioni tipiche. Osserva che per la retta (retta(x)), il metodo da un valore esatto per definizione. Osserva inoltre che per la parabola (parabola(x)), l'errore effettivo e quello teorico coincidono (a meno di errori introdotti dall'arrotondamendo dei numeri reali).
Infatti: la formula dell'errore teorico suppone di avere a che fare con segmenti parabolici, quindi ... per le parabole e' proprio nel giusto.

```
seno[x_] := Sin[x]
iperbole[x_] := 1 / x
parabola[x_] := - x^2 - 2 x + 3
retta[x_] := 2 x + 1
```

```
trapezi[ seno, 0, Pi, 20]
```

{approx=, 1.99589, vero=, 2., err – vero=, 0.00411403, err – teorico=, 0.00410388, n =, 20.}

```
trapezi[iperbole, 1, 3, 20]
```

{approx=, 1.09935, vero=, 1.09861, err – vero=, 0.000739922, err – teorico=, 0.000831262, n =, 20.}

```
trapezi[parabola, 0, 3, 20]
```

{approx=, – 9.01125, vero=, – 9., err – vero=, 0.01125, err – teorico=, 0.0118125, n =, 20.}

```
trapezi[retta, 0, 4, 20]
```

{approx=, 20., vero=, 20., err – vero=, 0., err – teorico=, 0., n =, 20.}

■ Prove con vari passi

In questo esperimento, integro il sin(x) tra [0,Pi] infittendo sempre piu' i punti:

```
Table[ trapezi[seno, 0, Pi, n], {n, 2, 20}]
```

approx=	1.5708	vero=	2.	err – vero=	0.429204	err – teorico=	0.322982	n =	2.
approx=	1.8138	vero=	2.	err – vero=	0.186201	err – teorico=	0.165754	n =	3.
approx=	1.89612	vero=	2.	err – vero=	0.103881	err – teorico=	0.0974685	n =	4.
approx=	1.93377	vero=	2.	err – vero=	0.0662344	err – teorico=	0.0636183	n =	5.
approx=	1.9541	vero=	2.	err – vero=	0.0459028	err – teorico=	0.0446439	n =	6.
approx=	1.96632	vero=	2.	err – vero=	0.0336833	err – teorico=	0.0330047	n =	7.
approx=	1.97423	vero=	2.	err – vero=	0.0257684	err – teorico=	0.0253709	n =	8.
approx=	1.97965	vero=	2.	err – vero=	0.0203492	err – teorico=	0.0201012	n =	9.
approx=	1.98352	vero=	2.	err – vero=	0.0164765	err – teorico=	0.0163138	n =	10.
approx=	1.98639	vero=	2.	err – vero=	0.013613	err – teorico=	0.013502	n =	11.
approx=	1.98856	vero=	2.	err – vero=	0.0114362	err – teorico=	0.0113578	n =	12.
approx=	1.99026	vero=	2.	err – vero=	0.00974282	err – teorico=	0.00968592	n =	13.
approx=	1.9916	vero=	2.	err – vero=	0.00839957	err – teorico=	0.00835727	n =	14.
approx=	1.99268	vero=	2.	err – vero=	0.00731617	err – teorico=	0.00728407	n =	15.
approx=	1.99357	vero=	2.	err – vero=	0.00642966	err – teorico=	0.00640487	n =	16.
approx=	1.9943	vero=	2.	err – vero=	0.00569506	err – teorico=	0.00567561	n =	17.
approx=	1.99492	vero=	2.	err – vero=	0.00507954	err – teorico=	0.00506406	n =	18.
approx=	1.99544	vero=	2.	err – vero=	0.00455868	err – teorico=	0.00454622	n =	19.
approx=	1.99589	vero=	2.	err – vero=	0.00411403	err – teorico=	0.00410388	n =	20.