CENNI DI FISICA MODERNA

MICHELE ANDREOLI

ABSTRACT. Principali risultati di Fisica Moderna.

NOTA INFORMATIVA: questo documento non è stato redatto con Microsoft Word, ma col sistema di stampa denominato TEX (pronuncia: *tek*), lo stesso usato per la produzione di documentazione scientifica ad alta qualità tipografica. La maggior parte delle pubblicazioni scientifiche al mondo, compresi molti libri di matematica che comprerete all'Università, è realizzata con il TEX. TEX, e i suoi derivati quali LATEX (che sto ora usando), a differenza di MS Word, è un sofware libero e gratuito, creato da *Leslie Davenport,* e liberamente distribuito su Internet.

CONTENTS

Date: 2002,2010,2021.

1. FISICA QUANTISTICA

1.1. **Energia classica dell'elettrone nel nucleo.** Si abbia un elettrone (carica -e, massa m) legato ad un nucleo con Z protoni (carica +Ze).Energia pertinente all'orbita classica di raggio r e velocità v è:

$$E(r,v) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{kZe^2}{r}$$

dove $k = 1/4\pi\epsilon_0$ e Z=numero atomico.

Come si vede, si tratta della somma dell'energia cinetica (T) e dell'energia potenziale elettrica (U) dell'elettrone, nel campo elettrico del nucleo: E=T+U.

Condizione 1: Quantizzazione semi-classica

In base alla formula data per l'energia, non sembrerebbe ci fosse un limite sulle orbite possibili di un elettrone intorno al nucleo.

Invece la teoria di Bohr prevede che la quantità $L = m \cdot v \cdot r$ (impulso x raggio=momento angolare) non possa prendere un valore qualsiasi, ma debba essere multiplo intero di una certa quantità minima $\hbar$ (detta costante di Planck: *h tagliato*). In formule:

$$L = m \cdot v \cdot r = n \cdot \hbar$$

La stessa cosa capita per la spesa al supermercato. Non è possibile avere spese del tipo 25,105 euro, dato che abbiamo come unità minima il cent. Tutte le spese possibili al supermercato saranno multiple intere del cent: spesa=n*cent. Espressa in cents, ogni spesa al supermercato diventa un numero intero: 25,10 E diventano 2510 centesimi. Allo stesso modo, il momento angolare, espresso in "h", diventa anch'esse un intero e può variare solo di quantità intere. è questo il succo del concetto di "quantizzazione". Invece di avere a che fare con quantità "continue" (cioè numeri reali), abbiamo a che fare con quantità "discrete" (cioè con numeri interi). Non fu facile, per i fisici, accettare questa novità!

Condizione 2: la circolarità dell'orbita:

Assumendo l'orbita circolare, la forza centripeta $-m\frac{v^2}{r}$ è fornita proprio dalla forza di attrazione elettrica da parte del nucleo $\frac{-kZe^2}{r^2}$ Ne consegue, che le due quantità devono essere uguagliate.

Mettiamo insieme le condizioni

Le ultime due condizioni (quantizzazione momento angolare e forza centripeta) permettono di determinare le incognite (r,v), semplicemente risolvendo il seguente sistema nelle due incognite (r,v):

$$\begin{cases} mvr = n\hbar \\ \frac{mv^2}{r} = \frac{kZe^2}{r^2} \end{cases}$$

Eseguendo il calcolo, si trova:

$$\begin{cases} r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{kZ \cdot m \cdot e^2} \\ v_n = \frac{kZ \cdot e^2}{n\hbar} \end{cases}$$

Si vede che il raggio dell'orbita dipende dal "numero quantico" n in modo quadratico, mentre la velocità v è inversamente proporzionale ad n. Quindi, nelle orbite più esterne gli elettroni sono più lenti.

Calcoliamo l'energia corrispondente al livello n, sostituendo i due valori trovati per (r,v) nella formula che da E(r,v):

$$E_n = -\frac{k^2 \cdot Z^2 \cdot m \cdot e^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{Z^2 \cdot A}{n^2}$$

dove A è una costante che (in eV) vale 13.6. I livelli sono quindi negativi (corrispondenti a "stati legati") ed aumentano allontanandosi dal nucleo, fino a raggiungere il valore zero per atomi ionizzati. La differenza tra due livelli vicini corrisponderebbe all'energia emessa o assorbita (in forma di luce) nell'effettuare il "salto quantico" tra i due livelli.

Dimensione dell'atomo di idrogeno H: Se osserviamo la formula che fornisce i raggi delle varie orbite r_n, ci accorgiamo che non può esservi un'orbita più bassa di quella corrispondente ad n=1 (orbita fondamentale). Se anche poniamo Z=1 (elemento H=idrogeno) troviamo un valore chiamato "*primo raggio di Bohr*" ed è pari a $r_1 = 0.52 \cdot 10^{-8} cm = 0.52 angstrom$.

1.2. **Instabilità atomica.** Secondo la Fisica Classica, l'elettrone accelerato dovrebbe irradiare onde e precipitare sul nucleo. Ma questo non si osserva. Come mai l'elettrone non può scendere "più sotto" di così? E' la Meccanica Quantistica che lo vieta. Scendendo più sotto infatti, il prodotto mvr (momento angolare L) verrebbe ad essere più piccolo di $\hbar$ (e cioè zero, dato che v=0 e r=0), mentre il *valore minimo* è proprio $\hbar$.

1.3. **Principio di Indeterminazione.** Alla radice di questo vi è il cosiddetto "Principio di indeterminazione di Heisenberg": non si può conoscere con precisione assoluta le due grandezze cinematiche (r,v), contemporaneamente. Se p=mv=l'impulso, si ha che le *indeterminazioni* Δx *e* Δp non possono essere piccole a piacere, ma devono rispettare la *relazione di indeterminazione*:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

1.4. **Energia di ionizzazione.** Analogamente a quanto fatto per il primo raggio di Bohr, si può anche calcolare l'energia che corrisponde al livello fondamentale dell'idrogeno, ponendo n=1 e Z=1 nella forma per i livelli energetici E_n. Se provi a farlo e provi ad esprimere il risultato con l'unità di energia consona per la microfisica (cioè l'eV) trovi circa $E_1 = -A = -13.6eV$.

Un elettrone che si trovasse su un orbita infinitamente lontana, avrebbe invece un energia pari a $E_\infty = 0$, cosa che può verificare subito ponendo $n = \infty$ nella formula per i livelli energetici.

Per allontanare un elettrone, dal livello di energia -13.6 ad uno di energia 0, occorrerà lavorare contro il campo elettrico (data che l'elettrone è attratto dal nucleo) e il valore totale (detto "potenziale di ionizzazione") è proprio pari a +13.6 eV.

1.5. **Emissione ed assorbimento di luce.** Il caso della ionizzazione appena trattato è un caso limite, corrispondente ad un allontanamento completo dell'elettrone dal nucleo. I casi intermedi (dove cioè l'elettrone si limita a saltare da un orbita all'altra) corrispondono invece a delle "transizioni" di livello. Esse possono verificarsi quando l'elettrone emette o assorbe un fotone, che è il quanto fondamentale della radiazione elettromagnetica (la luce, insomma).

Com'è noto dal programma di Ottica, il "colore" della luce è collegato alla frequenza dell'onda f, che si può anche esprimere nella forma di pulsazione dell'onda: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

Il problema è quindi il seguente: se l'elettrone "scende" dall'orbita 3 all'orbita 2 (di energia minore), esso emetterà certamente un fotone di energia pari a $\Delta E = E_2 - E_3$. Ma di che colore sarà la luce emessa?

Come si può intuire, fotoni più energetici avranno frequenze più alte e quindi avranno una "tendenza al blu". Intuiamo quindi una certa "proporzionalità" tra energia e frequenza. La costante di proporzionalità ... è proprio $\hbar$:

$$\Delta E = \hbar \cdot \omega$$

In conclusione, la formula:

$$\omega = \frac{E_n - E_m}{\hbar}$$

permette di calcolare il colore della luce emessa in una transizione "a scendere" ma, vista al contrario, anche il salto che corrisponderebbe all'assorbimento di un fotone di data frequenza.

1.6. **Spettri.** Se calcolassimo tutte le possibili differenze di energia tra i vari livelli, avremmo un quadro abbastanza completo di quale luce un atomo può assorbire o emettere. Avremmo cioè l' "impronta digitale" che caratterizza questo elemento chimico tra tutti gli altri (spettro dell'elemento chimico).

1.7. **Esperimento di Franck ed Hertz (1913).** Franck ed Hertz riuscirono a dimostrare l'esistenza dei livelli energetici di Bohr sperimentalmente: degli elettroni, attraversando un tubo pieno di vapori di mercurio, venivano casualmente assorbiti, diminuendo bruscamente la corrente totale I, misurata da un amperometro.

2. L'effetto fotoelettrico

Quando un fotone colpisce un metallo, occasionalmente può urtare un elettrone. Se l'energia del fotone ($\hbar \cdot \omega$) supera l'energia che tiene legato l'elettrone (U= carica x potenziale di estrazione: $U = e\phi$), l'elettrone può abbandonare il metallo, producendo corrente elettrica.

La parte di energia non utilizzata per l'estrazione la si ritrova nella forma di energia cinetica dell'elettrone. Per cui: (*massima velocità dell'elettrone*)

$$\frac{1}{2}mv^2 = \hbar \cdot \omega - e\phi$$

Quando si fa l'esperimento, invece di misurare la velocità dell'elettrone, si va a misurare *quale differenza di potenziale V_0 è capace di frenarlo completamente* (potenziale di frenamento).

Per la conservazione dell'energia (energia cinetica → energia potenziale elettrica), si avrà:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV_0$$

e quindi:

$$eV_0 = \hbar \cdot \omega - e\phi$$

Se si riporta sul grafico V_0 in funzione di ω, si otterrà evidentemente una retta, il cui coefficiente angolare permette di determinare $\frac{\hbar}{e}$, e l'intersezione con l'asse delle ω permette di determinare il potenziale di estrazione ϕ.

Conflitto con la spiegazione classica

Secondo la Fisica Classica, dovevano esserci estrazioni (magari poche) anche a basse energie per fotoniche. Invece, si hanno estrazioni soltato se $\omega \geq e\frac{\phi}{\hbar}$.

Secondo la Fisica Classica, l'energia degli elettroni doveva aumentare, aumentando l'intensità della luce. Invece, l'energia è sempre la stessa (eV_0), ma aumenta il numero di elettroni estratti.

3. NOTE

3.1. **Il volt (V).** Essendo L=q*V, si ha volt=joule/coulomb (V=J/C). *Si dice che tra due punti A e B c'è una diff. Di potenziale di 1V se la carica di 1C deve fare il lavoro di 1J per transitare tra A e B.*

3.2. **L'elettronvolt (eV).** L'elettronvolt (eV) non c'entra nulla col volt (V), ed è invece l unità di energia più importante della micro-fisica. *Un elettronvolt (simbolo eV) è l'energia acquistata da un elettrone libero quando passa attraverso una differenza di potenziale elettrico di 1 volt nel vuoto.* Sono molto usati i suoi multipli keV (kilo-eV, ossia 1000 elettronvolt), MeV (mega-eV, cioè un milione di elettronvolt) e GeV (giga-eV, cioè un miliardo di elettronvolt).

$$1eV = (1.6 \cdot 10^{-19}C) \cdot (1V) = 1.6 \cdot 10^{-19}C \cdot V = 1.6 \cdot 10^{-19}J$$

3.3. **Unità di massa in microfisica.** Tenendo conto della relazione $E = mc^2$ e quindi $m = E/c^2$, come unità di massa più adatta alla micro-fisica si usa il

$$MeV/c^2 = 1.79 \cdot 10^-30 \quad kg$$

In queste unità, la massa di un elettrone è di 0,511 MeV/c^2, e quella di un protone di 938 MeV/c^2; quella del bosone di Higgs, secondo i dati sperimentali avuti nel 2012, dovrebbe essere di 125,3 GeV/c^2.

3.4. **Alcune costanti utili.**

$e = 1.6 \cdot 10^{-19}C$	$h = 6.63 \cdot 10^{-34}Js$ $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}Js$
$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}Kg = 0.5Mev$	$m_p = 1.7 \cdot 10^{-27}Kg = 938MeV$

4. FISICA-TERMODINAMICA-CHIMICA

Argomenti di collegamento

4.1. **Confronto energia elettrica ed energia termica.** Abbiamo visto che l'energia dell'elettrone di H è circa 13 eV. Immaginiamo di avere molte molecole di idrogeno insieme, a formare un gas alla temperatura T (in gradi Kelvin). Sappiamo dalla termodinamica che lo stato di "agitazione" molecolare può essere descritto dicendo che ogni molecola ha una energia cinetica pari a $\frac{3}{2}kT$, dove k è la costante di Boltzman.

Questo significa in particolare che la grandezza kT è un'energia e quindi può essere espressa anch'essa in elettronvolt.

Se prendiamo come temperatura la temperatura ambiente (T=300 K) e proviamo a fare il calcolo, troviamo che kT è circa 1/40 di eV (0.025 ev), quantità ben nota ai fisici (ne seguito trascuriamo il fattore 3/2=1.5, dato che si fanno solo valutazioni grossolane).

Uno potrebbe farsi la seguente domanda: è possibile che, a causa degli urti termici, qualche elettrone salti di orbita?

Se questo potesse succedere, riscaldando la materia potremmo ottenere luce. Affinché questo succeda, l'energia termica deve essere comparabile con quella elettrostatic, cioè con 13 eV.

Ma a temperatura ambiente, abbiamo solo E=1/40 eV, troppo bassa per "eccitare" l'elettrone.

La cosa cambia se aumentiamo la temperatura.

Di che fattore dovremmo aumentarla? Del rapporto

$$13/(1/40) = 13 \cdot 40 = 520.$$

Questo porterebbe ad una temperatura assoluta 530 volte più grande di 300K, pari a circa 156 mila gradi Kelvin (un pò tantino ...)

4.2. **Energia di legame dell'NaCl: mezzi dielettrici.** Come mai una sostanza come il sale (o lo zucchero) tenute su un tavolo non si sciolgono, ma messe in acqua si sciolgono immediatamente?

è chiaro che qui la temperatura non c'entra: l'energia termica della molecola di sale NaCl è sempre circa kT, sia fuori che dentro l'acqua.

Tutto quello che possiamo dire è che l'energia di legame dell'NaCl è maggiore di kT, quando è in aria, ma minore di kT quando è in acqua, altrimenti la cosa non potrebbe essere spiegabile.

L'energia di legame di una molecola è energia puramente elettrica, come è ovvio: dobbiamo quindi accettare il fatto che dentro l'acqua l'energia elettrica *deve diminuire,* rispetto al vuoto. L'acqua (come tutti i mezzi dielettrici) riduce le forze e i campi elettrici.

Se riguardi un attimo l'espressione per l'energia potenziale elettrica U, ti accorrgi che essa è del tipo:

$$U_0 = \frac{1}{\epsilon_0} A$$

dove A è una quantità che dipende solo dalle cariche e dalle loro distanze, non dal mezzo in cui è immerso l'atomo. L'unica grandezza che è influenzata dal "mezzo" è proprio la "costante dielettrica" del mezzo, che qui è quella del vuoto.

Quale sarà allora l'energia della stessa identica molecola, quando sarà immersa in acqua? è chiaro che A non deve cambiare e che quindi mi aspetto una valore del genere:

$$U_{acqua} = \frac{1}{\epsilon_{acqua}} A$$

Poiché è noto che la $\epsilon_{acqua} = 81\epsilon_0$(si dice che la costante dielettrica relativa dell'acqua è 81), ne consegue che l'energia si è ridotta di un fattore 81:

$$U_{acqua} = \frac{1}{81} U_0$$

Cosa possiamo concludere dall'osservazione che il sale si scioglie in acqua a temperatura ambiente, ma non si scioglie in aria, alla stessa temperatura? Ovvia risposta: che U/81 è più piccolo di 3/2kT, ma U stesso è più grande di 3/2kT. In particolare, possiamo scrivere che:

$$\frac{3}{2}kT < U_0 < 81 \cdot \frac{3}{2}kT$$

Ignorando per un attimo i fattori 3/2, si ha che U è grossolanamente compresa tra 1/40 eV e circa 2 eV.

(comprendendo i 3/2, avremmo l'intervallo più preciso: [0.04 , 3.03] eV.

Il vero valore di U: se si consulta un libro di Chimica, si scopre che l'energia di legame di una molecola di NaCl è circa 1.28*10^-19 joule, pari a 0.8 eV, che effettivamente è compreso nel nostro intervallo.

5. RELATIVITA'

Schema qualitativo di alcuni risultati

Fornisco qui un semplice elenco di alcuni fatti connessi ad effetti quantistici e relativistici interessanti e che potresti voler approfondire (figurati!) o usare nella tua tesina. Le spiegazioni o non ci sono o sono assolutamente troppo qualitative e imprecise per essere realmente valide. Di più non si può fare con il tempo a disposizione.

5.1. **Energia di riposo.** Dalla Relatività Speciale discende che un corpo, anche quando è fermo, ha un'energia di quiete collegata alla sua massa, data da $E = m \cdot c^2$, dove (come sempre) c=velocità della luce. Detto in maniera semplicistica, potremmo dire che alla massa è associata un'energia, e viceversa.

5.2. **Corpi in movimento: energia, impulso.** Un corpo in movimento con velocità v dovrebbe avere come energia totale E="riposo + cinetica". La formula relativistica esatta è $E = \gamma \cdot m \cdot c^2$, con $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ (fattore di Lorentz). Se si assume che $x = v/c \to 0$, si può usare la formula di approssimazione $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + ...$, ottenendo:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + ...$$

e quindi :

$$E = \gamma m \cdot c^2 = m \cdot c^2 + \frac{1}{2} m v^2 + ...$$

Notare un fatto nuovo: se $v \to c$ si ha $\gamma \to \infty$, e dunque $E \to \infty$: *ci vuole un lavoro infinito per portare un corpo alla velocità della luce.* Per quanto riguarda $F = m \cdot a$, già Newton l'aveva in realtà scritta nella forma $F = dp/dt$, con $p = mv$. Nel caso relativistico, l'equazione resta la stessa, ma l'impulso diventa:

$$p = \gamma m v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} m v$$

5.3. **Energia di un fotone.** Trattando *l'atomo di Bohr*, abbiamo visto che ad un salto di energia E corrisponde l'emissione di un fotone di pulsazione ω; è ovvio perciò supporre che un fotone di questa pulsazione debba trasportare un'energia data da:

$$E = \hbar \omega$$

Luce fatta di fotoni: Fotoni blu più energetici dei fotoni rossi, etc. Anche la luce ha un impulso:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar \omega}{c}.$$

5.4. **Deviazione luce stellare.** I *fotoni = energia elettromagnetica.* Ma *massa=energia* secondo la relazione di Einstein. Ne consegue che i fotoni (quindi la luce) possono risentire dell'azione gravitazionale, come tutti gli oggetti dotati di massa.

Un fotone che, proveniente da una stella lontana, passi nei pressi del Sole, "cade" leggermente in direzione del centro del Sole, deviando dalla direzione originaria.

In conseguenza di ciò, le stelle di una costellazione ci appaiano spostate, quando il Sole è nella costellazione stessa. Spostate come? Si *allontanano* dal Sole. Spedizione di Sir Eddington. Lenti gravitazionali.

5.5. **Spostamento verso il rosso delle righe spettrali.** *Considerazioni qualitative.* Un fotone che parte con una certa energia $E_1 = \hbar\omega_1$ da una stella, nel superare il campo gravitazionale per un'altezza H, perde energia. Infatti, applicando la conservazione dell'energia, supponendo per un momento che l'energia del fotone possa essere considerata "equivalente" ad una massa gravitazionale m, si avrebbe

$$\hbar\omega_1 = \hbar\omega_2 + mgH$$

E' chiaro quindi che la frequenza dim $\omega_2 < \omega_1$ e il colore sarà spostato più verso il rosso.

Posto $m = \hbar\omega/c^2$ nell'equazione precedente ed eliminato $\hbar$, si ha approssimativamente:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx -\frac{g \cdot H}{c^2}$$

dove $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

5.6. **Orologi nel campo gravitazionale.** Nel 1975 due orologi atomici furono perfettamente sincronizzati e portati uno a Torino e l'altro sul Cervino (esperimento *Briatore Leschiutta*. Dopo 68 giorni, l'orologio di Torino (orologio 1) era indietro di $2.4\mu s$ rispetto a quello sul Cervino (orologio 2). A Torino, quindi, sono segnati intervalli di tempo inferiori a quelli sul Cervino: $t_1 < t_2$. E' come dire che sul Cervino,3250m più in alto di Torino, dove il campo gravitazionale è più debole, "gli orologi vanno più svelti". Questa cosa si può spiegare con la stessa formula del red-shift gravitazionale. Infatti, la quantità $\omega \cdot t$ rappresenta "il numero di oscillazioni" dell'onda, il quale deve essere lo stesso per i due orologi. Ne consegue che i tempi si trasformano in proporzionalità inversa alle frequenze, e dato che è $\omega_2 < \omega_1$, sarà automaticamente $t_2 > t_1$. Le differenze percentuali avranno quindi il segno $+$:

$$\frac{\Delta t}{t} \approx \frac{g \cdot H}{c^2}$$

Benchè piccolo, se non si tenesse conto di questo effetto, correggendo di tanto in tanto gli orologi dei satelliti, dopo un po' il sistema GPS diventerebbe inutilizzabile.

5.7. **Buchi neri.** Com'è noto, un corpo per lasciare il campo di gravità deve avere una determinata velocità di fuga, che dipende dalla massa M e dal raggio R del corpo celeste. Se la velocità di fuga supera la velocità della luce c,

$$\sqrt{\frac{2GM}{R}} \geq c,$$

è impossibile lasciare il campo gravitazionale, e si parla allora di buco nero. Un buco nero è un corpo estremamente massivo e denso. Il campo gravitazione che genera è così intenso che neanche i fotoni , di qualsiasi frequenza, riescono ad uscirne. Ne consegue, che non può essere rivelato con i normali mezzi di osservazione, ma solo dagli effetti gravitazione che provoca sui corpi vicini.

5.8. **Effetto Doppler longitudinale: red-shift.** Se, per un'onda, $c = \lambda/T$ è un invariante, allora la lunghezza d'onda λ deve trasformarsi come un tempo T. Si dimostra che, se la sorgente è in moto con velocità v, rispetto all'osservatore, la frequenza trasmessa e quella ricevuta sono legate dalla relazione:

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

Risulta che $\omega' < \omega$, e quindi $\lambda' > \lambda$: la luce di una galassia che si allontana da noi con velocità v appare spostata verso il rosso.

NB: se la sorgente si avvicina, devi cambiare il segno della v.

5.9. **Diffetto di Massa e Fissione Nucleare.** Considera un nucleo atomico di massa M. Supponiamo che, ad un certo punto, il nucleo si rompa (*decadimento spontaneo*) in due nuclei di masse $M_{1,}M_2$.

Con un semplice argomento, basato sulla relazione massa-energia, voglio fare vedere che la massa totale non è uguale alla somma delle masse delle singole parti, come uno potrebbe credere.

Per la conservazione dell'energia, dev'essere: (energia iniziale= energia finale):

$$M \cdot c^2 = M_1c^2 + M_2c^2 + E_{cinetica}$$

La relazione appena scritta è abbastanza ovvia: l'energia iniziale Mc^2 deve essere sufficiente per creare due corpi di massa M_1 ed M_2 ma anche per tenerli in moto.

Dividendo per c^2, si comprende subito che $M > M_1 + M_2$.

Se invece risultasse che, per una certa reazione nucleare, è $M < M_1 + M_2$, allora quella reazione nucleare non può avvenire *spontaneamente*.

Può però avvenire se forniamo energia dall'esterno, bombardando il nucleo con altre particelle veloci (neutroni). Si ha a che fare, allora, col processo di *fissione nucleare.*

6. Appendice 1: Dilatazioni e contrazioni

Deduzioni senza far uso delle Trasformazioni di Lorentz.

6.1. La dilatazione temporale. Un vagone ferroviario (di altezza h) viaggia verso destra, con velocità v, nel riferimento S (stazione). Un lampo luminoso parte dal fondo del vagone e raggiunge il tetto.

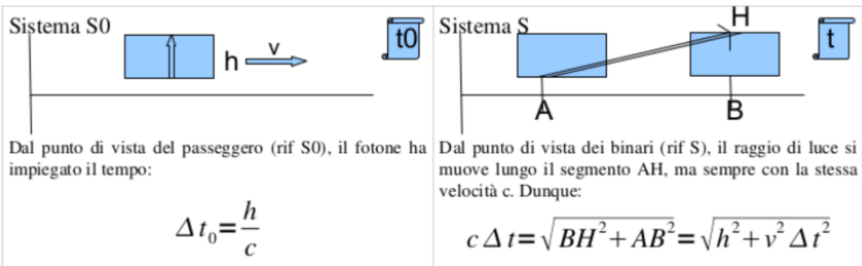

Figure 1. Dilatazione temporale

Dal punto di vista dei binari (rif S), il raggio di luce si muove lungo il segmento AH, ma sempre con la stessa velocità c. Dunque:

$$c\Delta t = \sqrt{BH^2 + AB^2} = \sqrt{h^2 + v^2\Delta t^2}$$

Eliminando h dalle due relazioni e risolvendo per Δt, si trova:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \Delta t_0 = \gamma \Delta t_0$$

Risultato: *la distanza temporale minima* Δt_0*(tempo proprio) si ha solo nel riferimento dove i due eventi accadono nello stesso punto. In ogni altro sistema si ha* $\Delta t > \Delta t_0$. (paradosso dei gemelli)

6.2. La contrazione spaziale. Riconsideriamo di nuovo il treno e consideriamo la misura della sua lunghezza L. Vedremo che il passeggero sul treno S0 e quello sul binario S *troveranno due misure diverse.*

Supponiamo che sul binario vi sia una fotocella: quando la testa del vagone passa sulla fotocella, questa fa partire un cronometro, fermo sul binario, il quale verrà stoppato quanto vi passa sopra la coda. Contemporaneamente, verranno fatti partire due orologi fermi sul treno, uno alla testa, uno alla coda.

Punto di vista di S: i due eventi avvengono nello stesso punto: si tratta quindi di un intervallo di *tempo proprio* Δt_0. S dirà che L deve valere: $v\Delta t_0 = L.$

Punto di vista di S0: il passeggero in moto farà la differenza tra i tempi degli orologi di testa e di coda (Δt) e calcolerà la lunghezza con la formula. $v\Delta t = L_0$

Facendo il rapporto di L ed L_0 si ha:

$$\frac{L}{L_0} = \frac{v\Delta t_0}{v\Delta t} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \frac{1}{\gamma}$$

e quindi: $L = L_0/\gamma$ (che è minore di L_0). Quindi: *la lunghezza di una asta ha il massimo valore (* L_0*=lunhgezza a riposo) soltanto nel riferimento dove è ferma. In tutti gli altri appare più piccola.*

6.3. Eventi contemporanei. Un vagone ferroviario (lunghezza d) viaggia con velocità v, verso destra (v. figura), relativamente al riferimento stazione S. M' è un passeggero posto nel punto di mezzo del treno; A e B due passeggeri posti in fondo ai due lati della carrozza. Ad un certo punto, due lampi di luce vengono emessi da M' verso A e verso B.

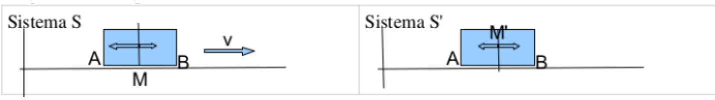

FIGURE 2. Contemporaneità

Dal punto di vista di S', i due lampi giungono contemporaneamente ai passeggeri A e B. Ma cosa vedrebbe un osservatore M fermo sui binari? Per M, il passeggero A va incontro al lampo, mentre il passeggero B invece se ne allontana. Nel tempo t, il raggio MA deve fare uno spazio minore $(d/2 - vt)$ e MB uno spazio maggiore $(d/2 + vt)$. Dal punto di vista delle Fisica Classica, questo non è un problema: anche le velocità dei lampi sono diverse e i due effetti si compensano esattamente.

Visione classica	Visione relativistica
Rispetto ad S, il lampo MA ha velocità minore $c - v$, mentre il lampo MB ha velocità maggiore $c + v$. Applicando la relazione spazio=velocità x tempo per i due raggi, si ha: $t \cdot (c \pm v) = \frac{d}{2} \pm t \cdot v$ Risolvendo per t si trova $t_{AM} = t_{BM} = d/2c$	Rispetto ad S, i lampi AM e BM *devono* avere la stessa velocità c (postulato di Einstein), e fanno spazi diversi $d/2 - vt$ e $d/2 + vt$, dunque i tempi sono diversi: $t \cdot (c) = \frac{d}{2} \pm t \cdot v$ Risolvendo per t si trova: $t_{AM} = d/2 \cdot (c + v)$ e $t_{BM} = d/2 \cdot (c - v)$

Ma dal punto di vista della Fisica Relativistica, è A a vedere per primo il lampo. E, quello che è ancora più strano, sia M che M' hanno ragione.

Eventi contemporanei in un sistema, non lo saranno più in un sistema in moto relativo con quello.

7. APPENDICE 2: LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

7.1. **Trasformazioni di Galilei.** Dati due riferimenti inerziali S ed S', individuati rispettivamente dai sistemi di coordinate (x,t) e (x', t'), e caratterizzati da una velocità relativa v costante, la trasformazione di Galilei che li collega è definita da:

$$x = x' + v \cdot t', \quad t = t'$$

Le trasformazioni di Galilei sono strettamente collegate a quello che viene chiamato *Principio di relatività Galileiano*, secondo il quale risulta impossibile determinare la velocità assoluta di un sistema di riferimento inerziale mediante esperimenti puramente meccanici. Tale principio può essere sinteticamente formulato come segue:

(1) gli intervalli temporali sono gli stessi in tutti i sistemi inerziali;
(2) le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali.

7.2. **Trasformazioni di Lorentz.** Le trasformazioni di Galilei prevedono una legge di composizione delle velocità totalmente errata; e non solo per i corpi in moto, ma anche per la luce stessa, la cui velocità finirebbe per dipendere dal sistema di riferimento in cui la osserviamo.

Se alle trasformazioni si impone la condizione che la quantità $x^2 - c^2t^2$ sia *invariante* tra i vari sistemi, si trova la trasformazione corretta:

$$x = \gamma \cdot (x' + v \cdot t'), \quad t = \gamma \cdot (t' + \frac{v}{c^2} \cdot x')$$

dove si è introdotto il *fattore gamma*:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Se $v/c \to 0$ (limite non-relativistico), si ha $\gamma \to 1$, e le trasformazioni di Lorentz diventano quelle di Galilei. L'applicazione coerente delle trasformazioni di Lorentz, permette di ritrovare in maniera rigorosa tutti i risultati visti precedenemente: dilatazione temporale, contrazione spaziale, etc.

7.3. **Composizione relativistica delle velocità.** Se un corpo si muove con velocità u nel sistema S, che velocità avrà nel sistema S', in moto relativo con velocità v rispetto ad S? Secondo la trasformazione di Galileo, la risposta sarebbe $u = u' + v$. Notare che se u=c e se ci muovessimo alla stessa velocità della luce (v=c), la luce apparirebbe "ferma": u'=c, il che è un assurdità. Applicando Lorentz agli intervalli infinitesimi (dx,dt), avremo invece:

$$dx = \gamma \cdot (dx' + v \cdot dt'), \quad dt = \gamma \cdot (dt' + \frac{v}{c^2} \cdot dx')$$

per cui, essendo $u' = dx'/dt'$ e $u = dx/dt$, dividendo membro a membro le due relazioni, troveremo:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}$$

che è la nuova legge di composizione. Notare che se u=c, allora u'=c, qualcunque sia la velocità relativa v tra S ed S', come prevede il *Postulato di Einstein*.

7.4. **Il principio di Casualità.** Secondo questo principio, la causa deve sempre predecere l'effetto: se nel sistema di riferimento S il centravanti tira un rigore e il portiere para, non può esistere un sistema S', in moto relativo con velocità v rispetto ad S, in cui *prima* il portiere para e *poi* il centravanti tira. Dal punto di vista matematico, detto $\Delta t > 0$ l'intervallo tra due eventi in S, dobbiamo dimostrare che non è possibile che sia $\Delta t' < 0$, per nessun valore di v. Per farlo basta scrivere la trasformazione di Lorentz per il tempo

$$dt' = \gamma \cdot (dt - \frac{v}{c^2} \cdot dx)$$

e notare che $\Delta t' < 0$ implica:

$$\frac{dx}{dt} > \frac{c^2}{v} > c$$

il che è impossibile. [1]

[1] L'ultima delle due disuguaglianze è dovuta al fatto che $v < c$ implica $\frac{c^2}{v} > c$.