PROBABILITÀ E STATISTICA

appunti a sostegno delle lezioni

Calcolo combinatorio

Formula di Stirling

Serve per calcolare il fattoriale di numeri grandi, attraverso l'uso dei logaritmi.

$$n! \cong \sqrt{2\pi n}\cdot n^n \cdot e^{-n}$$

La regola d'oro

PRINCIPIO FONDAMENTALE DEL CALCOLO COMBINATORIO

Consideriamo innanzitutto il seguente principio fondamentale.

Principio fondamentale del calcolo combinatorio: Se una procedura può essere realizzata in n_1 modi diversi, e se, dopo questa procedura, una seconda procedura può essere realizzata in n_2 modi diversi, e se, dopo questa seconda procedura, una terza procedura può essere realizzata in n_3 modi diversi, e così via; allora il numero di modi in cui la procedura può essere realizzata nell'ordine indicato è $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots$

Esempio 2.1: Supponiamo che una targa d'automobile contenga due lettere distinte seguite da tre c la prima delle quali diversa da zero. Quante targhe distinte si possono formare?

La prima lettera può essere stampata in 26 modi diversi, la seconda in 25 modi divers (poichè la lettera stampata prima non può essere scelta come seconda lettera), la prin cifra in nove modi diversi e ognuna delle altre due cifre in 10 modi. Quindi si posson stampare

$$26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 585\,000$$

targhe distinte.

Permutazioni ordinate: Disposizioni

Si abbia un insieme di *n* oggetti (ad esempio: lettere dell'alfabeto) da sistemare in *k* scatole, una per scatola. In quanti modi distinti possiamo farlo? Tenere presente che l'ordine conta, per cui ABC è contata distinta da BAC, etc.

oggetti tutti diversi

$$P(n,k) = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots}_{k \text{ volte}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

oggetti parzialmente ripetuti

$$P(n,k;n_1,n_2\ldots) = \frac{P(n,k)}{n_1!\,n_2!\,n_3\ldots}$$

Qualche volta P(n,k) viene anche indicata con D(n,k): *disposizioni di n oggetti presi k a k*. Se il numero di scatole coincide col numero di oggetti k=n, si ha P(n,k)=P(n)=n! (dette semplicemente *permuatazioni* di n oggetti distinti). Negli anagrammi si ha effettivamente k=n. Esempio del primo tipo: *anagrammi della parola AMOR;* del secondo tipo: *anagrammi della parola RAMARRO.*

Esempio*: quante parole di tre lettere (k=3) tutte diverse si possono fare con n=26 caratteri alfabetici?* Risposta: P(26,3).

Altro esempio:

Esempio 2.7: Quanti segnali distinti, ognuno formato da 8 bandiere allineate verticalmente, si posso ottenere da un insieme di 4 bandiere rosse non distinguibili, 3 bandiere bianche non d stinguibili,e una bandiera azzurra? Cerchiamo il numero di permutazioni di 8 oggetti 4 sono uguali (le bandiere rosse) e 3 sono uguali (le bandiere bianche). Per il teorema dente ci sono

$$\frac{8!}{4!\,3!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} = 280$$

segnali differenti.

Permutazioni non ordinate: Combinazioni

Il problema è analogo, ma ora l'ordine non conta, per cui ABC e BAC, ad esempio, *vanno contate una sola volta*. Questo riduce il risulato, rispetto al caso ordinato.

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots}^{k\text{ volte}}}{k!} = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Esempio*: quanti gruppi di k persone si possono fare in una popolazione di n soggetti?* In questo caso, ovviamente l'ordine non conta. Risposta: C(n,k).
Esempio: *quante diagonali si possono tirare in un pentagono*? Risposta C(5,2)-5

Riassumendo

Le permutazioni possono essere ordinate (*disposizioni P(n,k) o D(n,k)*) o non ordinate (*combinazioni C(n,k)).* Il secondo caso implica meno possibilità, per cui la formula comprende generalmente una divisione che ne riduce il numero. Le pemutazioni (dei due tipi) possono essere viste come una "pesca" senza reimbussolamento da un'urna finita.

Esempi particolari

Numero di sottoinsiemi di un insieme di n elementi	E' 2^n. Infatti: preso un sottoinsieme qualsiasi, ognuno degli elementi ha due possibilità: farne parte o no.	*Numero di triangoli insicritti in un poligono di n lati*	C(n,3)
Numero di coppie di amici che si possono formare con n persone	C(n,2), le combinazioni di n elementi presi a 2 a 2	*Numero di squadre di calcio che si possono fare con 500*	C(500,11)

studenti

Probabilità

Cos'è la probabilità

Il calcolo delle probabilità è lo studio degli esperimenti casuali e non deterministici, cioè di tutti quei fenomeni nei quali il risultato non può essere predetto in maniera univoca, come ad esempio il lancio di un dato o di una moneta o il numero di macchine che passano in un minuto davanti casa nostra. Le *leggi probabilistiche* sono leggi di tipo diverso da quelle di discipline come la Meccanica. Se affermo che la probabilità di un evento è p=0.28 voglio soltanto dire che su 100 tentativi, l'evento si verifica mediamente 28 volte.

Spazio degli eventi

Definiamo *evento elementare* un'enunciato, un'affermazione (relativa, ad esempio, ad un esperimento fisico) suscettibile di assumere i soli valori vero o falso.
Esempio: T=[testa], oppure F=[carta di fiori], R=[un re]
Definiamo *spazio degli eventi S* l'insieme di tutti gli eventi relativi ad un dato esperimento:

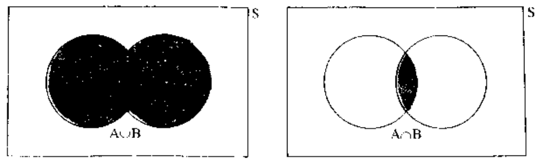
$$S = \{E_1, E_2, E_3, ...\}$$

Definiamo *evento composto* o semplicemente *evento* l'unione e l'intersezione logica di eventi elementari:
Esempio: $F \cup R$=[carta di fiori oppure un Re], $F \cap R$=[Re di Fiori]
Gli eventi sono quindi *i sottoinsiemi* di S, cioe' l'insieme delle parti di S, indicato con [S].
Osservazioni e definizioni varie:

- S è egli stesso un evento (potremmo definirlo "qualsiasi risultato"), ed è detto *evento certo*.
- Se A∩B=∅, con A e B sottoinsiemi di S cioè *eventi*, vengono detti *disgiunti* o *incompatibili*, cioè non si verificano mai insieme.
- L'evento $\overline{E}$ viene detto *complementare* di E, negazione di E. Si verifica quando non si verifica E. Si capisce subito che, per ogni E, S=$\overline{E}$ ∪E.
- S come ogni insieme, ha come sottoinsieme l'insieme vuoto ϕ, il quale viene detto *evento impossibile*.
- Due eventi A e B sono detti *indipendenti* se il verificarsi di A non influenza il verificarsi di B, e viceversa.
- Si definisce *partizione* di S un insieme di eventi (ipotesi) H_1, H_2, H_3, ... disgiunti a coppie tali che si possa scrivere:

$$S = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \ldots$$

Rappresentazione grafica di S (diagrammi di Venn)



Gli eventi possono essere rappresentati come sottoinsiemi dell'insieme S, nel piano cartesiano. Con questo trucco l'unione e l'intersezione diventano familiari.

L'unione rappresenta il connettivo "o" e l'intersezione rappresenta il connettivo "e".

Le varie definizioni di probabilità

Defimiz. classica	Definiz. frequentista	Definiz. Assiomatica
$P(E) = \dfrac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$	$P(E) = \lim\limits_{prove \to \infty} \dfrac{successi}{prove}$	$p : [S] \to [0,1]$

- La **def. classica** si può applicare solo se tutti i casi sono ugualmente probabili. Definizione leggermente tautologica, perché utilizza il concetto di equiprobabilità prima ancora di definirlo. Si dice *"a priori"* perché può essere calcolata prima dell'esperimento, mediante tecniche di calcolo combinatorio.
- La **def. frequentista** è più operativa, perché implica un "processo di misura".
- La **Def. Assiomatica** (*Kolmogorov)* viene definita, in maniera astratta, come funzione dotata di certe proprietà (vedi in seguito). In pratica, *p associa ad ogni evento di S un numero compreso tra 0 (evento impossibile) e 1 (evento certo).* Per avere un idea più intuitiva del suo significato, possiamo pensare che p(E) *misura l'area occupata dal sottoinsieme E.* Ma, attenzione!, quest'affermazione ha valore soltanto mnemonico.

Proprietà astratte della probabilità

Alcune delle proprietà che p deve avere per potere essere una *funzione probabilità*:

1. p(S)=1, p(∅)=0
2. p(A∪B)=p(A)+p(B)-p(A∩B)
3. p(A∩B)=p(A)·p(B) se A e B sono *indipendenti*
4. $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$

Discussione

- Le proprietà 1 e 4 sono intuitive.
- La proprietà 3 deriva direttamente dal Principio Fondamentale del Calcolo combinatorio. Se due eventi sono indipendenti, i casi favorevoli in un certo senso "si moltiplicano", come le combinazioni.

- La proprietà 2 si può dimostrare facilmente usando i diagrammi di Venn e pensando alla probabilità come ad un area.

Nella pratica si usa un misto di la definizione *classica* e definizione *insiemistica*. Indichiamo col simbolo $|E|$ = "numero di elementi nell'insieme E", possiamo defininire la probabilità insiemistica (o di Kolmogorov) la quantità:

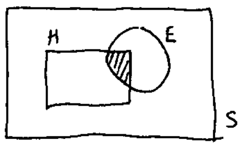
$$P(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

e in questo modo essa coincide con la definizione classica, in tutti i casi interessanti.

Probabilità condizionata e Teorema di Bayes

Probabilità condizionata

Nota: nel seguito si usa la lettera H per gli eventi detti ipotesi *(dall'iniziale in inglese) e si indica con $|E|$ il "numero di elementi contenuti nel sottoinsieme E".*



Definizione:

$$P(E / H) = \frac{|E \cap H|}{|H|} = \frac{\text{casi di E in H}}{\text{casi di H}} = \frac{P(E \cap H)}{P(H)}$$

NB: Dove c'è scritto "casi" possiamo leggere "elementi". Il quarto membro della catena si può ottenere facilmente dal secondo, dividendo numeratore e denominatore per $|S|$.

In parole molto semplici possiamo definire la P(E/H) come "*la probabilità che capiti E, quando si sa che è capitato H*". In un certo senso, *l'ipotesi H causa l'effetto E.*
Questa formula (con le sue inverse) è molto usata quando gli eventi dello spazio campionario S contemplano *due caratteristiche concomitanti* E ed H e si vuole studiare come si influenzano a vicenda. Teniamo presente che P(E/H), considerata come funzione di E, gode di tutte le proprietà di una probabilità, per cui $P(\overline{E} / H) = 1 - P(E / H)$.

Esempio 1:

Definiamo i seguenti eventi: F="è malato" e V="va a scuola" e analizziamo una certa popolazione di studenti. Si sa che si ammalano di raffreddore con probabilità P(M)=0.02 (2%) e, inoltre, che quando sono malati vanno a scuola con percentuale P(V/M)=0.30 (30%). Viceversa, quando non sono malati, vanno a scuola con probabilità $P(V / \overline{M}) = 0.95$ (95%).

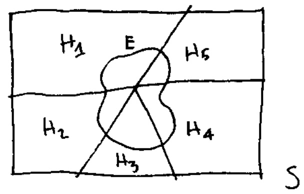
Con quale probabilità P(V∩M) uno studente a caso, va a scuola raffreddato? Invertendo la formula della probabilità condizionata si trova immediatamente che P(V∩M)=P(M)·P(V/M)=0.02·0.30=0.006.

Con quale probabilità uno studente a caso resta a casa e sta bene? Soltanto il 95% delle volte che sta bene va a scuola, per cui resta a casa il 5% delle volte che stà bene: $P(\overline{V} / \overline{M}) = 0.05$. La probabilità si calcola come prima:

$$P(\overline{V} \cap \overline{M}) = P(\overline{M}) \cdot P(\overline{V} / \overline{M}) = 0.98 \cdot 0.05 = 0.049$$

Possiamo concludere che su 200 giorni di lezione lo studente medio: si ammala 4 volte (il 2% di 200); che va a scuola 1.2 volte raffreddato (6 per mille di 200); resta a casa in ottima salute 9.8 volte (il 4.9% di 200).

Teorema di completezza (o delle probabilità totali)



Siano H_i (al variare di i) una serie di ipotesi disgiunte (una partizione di S). In un certo senso, questa partizione divide E "in spicchi". Poiché la probabilità "assomiglia" ad un area, l'area di E sarà la somma delle aree di ogni intersezione, per cui:

$$P(E) = \sum_i P(E \cap H_i) = \sum_i P(H_i) \cdot P(E / H_i)$$

Per ottenere il terzo membro è stata applicata la formula delle probabilità composte ad ogni addendo del secondo membro.

Esempio 2: (*continuanzione dell'esempio 1*)

Nell'esempio 1 le ipotesi disgiunte sono due: *malato*,non *malato*. Facciamoci la seguente domanda: con quale probabilità lo studente và a scuola? Risposta:

$$P(V) = P(M) \cdot P(V / M) + P(\overline{M}) \cdot P(V / \overline{M}) =$$
$$0.02 \cdot 0.30 + 0.98 \cdot 0.95 = 0.937$$

Analisi 1: Questo significa che va a scuola 187.4 volte, mentre non ci và 12.6 volte. Di queste 12.6 volte che resta a casa, 9.8 è sano e 2.8 perché e malato (sottrazione).
Analisi 2: in un istituto di 500 studenti, 500·0.937=468.5 sono presenti e 31.5 assenti, mediamente.

Teorema di Bayes

Se scriviamo la probabilità P(E∩H) nelle due forme possibili 1 e 2, uguagliando troviamo:

forma 1	forma 2	teorema di Bayes
$p(E \cap H) = P(H) \cdot P(E / H)$	$p(E \cap H) = P(E) \cdot P(H / E)$	$P(H / E) = \frac{P(H) \cdot P(E / H)}{P(E)}$

La formula di Bayes è utile per verificare la validità dell'ipotesi H, a seguito di un esperimento che ha dato come risultato E.

Esempio 3: *(continuazione dell'esempio 1)*

Con quale probabilità P(M/V), preso uno studente in classe, questo è malato?

$$P(M/V) = \frac{P(M)\cdot P(V/M)}{P(V)} = \frac{0.02\cdot 0.30}{0.937} = 0.0064$$

Questo significa che su 468.5 studenti presenti di un istituto, ne risultano 0.0064·468.5=3 raffreddati (valorosi!).

Con quale probabilità uno studente che è assente è malato?

$$P(M/\overline{V}) = \frac{P(M)\cdot P(\overline{V}/M)}{P(\overline{V})} = \frac{0.02\cdot 0.70}{0.063} = 0.222$$

Questo significa che su 31.5 assenti, circa 31.5·0.222=7 lo sono per malattia.

Variabili casuali, funzioni di probabilità e correlazione

Definizione di variabile casuale

Una variabile casuale x potrebbe essere definita, in maniera più o meno rigorosa, *come qualsiasi funzione che associa ad ogni evento di S un numero*. In maniera meno precisa, ma più intuitiva, possiamo dire in questo modo: *una variabile casuale x è una quantità legata allo spazio degli eventi S connesso ad un dato esperimento ma il cui valore non è esattamente determinato, se non in maniera "probabilistica"*.

Se x ha valori interi si dice variabile *discreta*, se ha valori reali si dice variabile *continua*.

Esempi di variabili casuali:

- x="distanza dal centro del bersaglio nel gioco delle freccette"
- x="numero di teste ottenute lanciando 10 monete"
- x="quante volte totalizzo 12 lanciando 2 dati 10 volte"

Funzione di probabilità o distribuzione

Consideriamo una variabile casuale discreta x. Sia $x_1,x_2,...,x_n$ i valori che può assumere. Per concretezza conviene pensare al caso dei voti scolastici: i valori che x può assumere sono 0,1,2,...10. Supponiamo di aver analizzato la nostra pagella e di aver scoperto che un dato voto x_i compare n_i volte e che i voti siano in tutto N. Il rapporto n_i/N, sempre compreso tra 0 e 1, non è altro che la *frequenza relativa* di un dato voto. Indichiamolo con $f(x_i)$. Ovviamente, questo valore quantifica con che frequenza, in percentuale, un certo voto compare nella nostra pagella. Se incece che prendere soltanto la nostra pagella, prendessimo tutte le pagelle della classe o tutte quelle dell'istituto, otterremmo delle frequenze relative ad un campione più numeroso. In base alla definizione frequentista della probabilità, possiamo concludere che, per N molto grande, $f(x_i)$ tende alla *probabilità* che in una certa scuola si attribuisca un certo voto: per questo motivo $f(x_i)$ è detta funzione di probabilità o distribuzione (dei voti in questo caso). Per come è definita, f(x) soddisfa la seguente relazione:

teorema della probabilità totale: $$\sum_i f(x_i) = 1$$

Valore medio e varianza

Il valore medio, detto anche *valore di aspettazione* ("Expected Value"), è spesso indicato anche con: $\overline{A}$, o$\langle A \rangle$. Definiamo ora due grandezze molto importanti in statistica e che, in un certo senso, *riassumono* le informazioni connesse ad una data variabile casuale x:

media (o speranza matematica o valore di aspettazione)

$$E(x) \equiv \frac{\sum_i n_i \cdot x_i}{N} = \sum_i x_i \cdot f(x_i)$$

varianza (o scarto quadratico medio)

$$Var(x) \equiv \left\langle (x-\mu)^2 \right\rangle = \sum_i (x_i-\mu)^2 \cdot f(x_i)$$

Il valore medio di x si indica anche con μ e la varianza con σ^2. La radice quadrata della varianza, cioè σ, quantifica *la dispersione dei dati intorno alla media.*

Legge dei grandi numeri

Disuguaglianza di Chebyshev : $P(|x-\mu| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

Dipendenza, indipendenza e correlazione

Siano x e y due variabili discrete. Consideriamo questi due esempi:

Esempio 1:	**Esempio 2:**
x="voti di matematica"	x="numero di tossico-dipendenti"
y="voti di italiano"	y="numero di malati di AIDS"

Ci facciamo la seguente domanda: c'è o no *correlazione* tra x e y? Se si, come possiamo *quantificare* questa relazione? In entrambi gli esempi la risposta è cruciale per sapere se c'è o no rapporto di causa ed effetto tra due fenomeni. Viceversa, si suppone che due variabili del tipo x="voto in matematica" e y="precipitazioni annue in Val Padana" non siano affatto correlate, o no?. In questo caso, si dice che sono *indipendenti*. La statistica permette di dare una risposta, di tipo probabilistico, al problema.

Se facciamo un semplice esperimento numerico, scopriamo subito che se due variabili x y sono incorrelate allora dev'essere $E(x\cdot y)=E(x)\cdot E(y)$. Se quest'uguaglianza non è valida, la differenza dei due membri viene utilizzata per definire i seguenti coefficienti statistici*:*

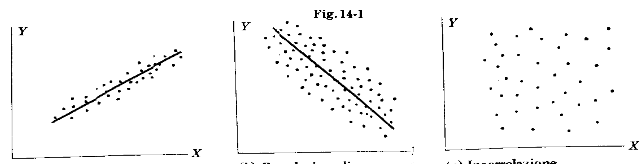
covarianza

$$Cov(x,y) = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y)$$

coeff. di correlazione

$$R(x,y) = \frac{E(x\cdot y) - E(x)\cdot E(y)}{\sqrt{Var(x)\cdot Var(y)}}$$

In particolare R è sempre in valore assoluto inferiore ad 1. Per R=±1 si ha correlazione lineare, per R=0 non c'è correlazione.



(*a*) Correlazione lineare positiva (*b*) Correlazione lineare nega (*c*) Incorrelazione

Probabilità di successo

Consideriamo prove ripetute e indipendenti di un esperimento con due esiti: definiamo uno dei *due successo,* l'altro *insuccesso*. Il nostro obbiettivo è determinare la probabilità P(x) che, in n tentativi, ci siano x successi. Trovata P(x), possiamo determinare *il numero medio* $\mu=E(x)$ di successi, nel complesso delle prove, e la varianza σ^2=Var(x).
La soluzione dipende da cosa effettivamente conosciamo dell'esperimento, per cui noi considereremo 3 modelli di problema, ognuno dei quali conduce ad una soluzione diversa.

Consideriamo l'estrazione di palline da un urna che contiene B palline bianche e N palline nere, per un totale TOT=B+N. Per successo si intende l'estrazione di una pallina bianca. Si fanno *n* estrazioni e si contano i successi ottenuti x.

Problema 1 : estrazione con reimbussolamento (Distr. binomiale)

In questo problema-modello, ad ogni estrazione la pallina viene rimessa nell'urna. Ad ogni estrazione la probabilità p di pescare una pallina bianca (successo) è perciò sempre la stessa p=B/TOT, mentre la probabilità di pescarla nera (insucceso) è q=1-p.

casi favorevoli	casi possibili	probabilità
$B^x \cdot (TOT-B)^{n-x} \cdot \binom{n}{x}$	TOT^n	$P(x)=\dfrac{B^x \cdot (TOT-B)^{n-x} \cdot \binom{n}{x}}{TOT^n}$

L'espressione dei casi favorevoli è diretta conseguenza della *Regola D'oro.* Eseguendo la divisione nell''ultima espressione, troviamo un'espressione dipendente soltanto da p: la distribuzione binomiale, che è la madre di tutte le distribuzioni:

$$P(x)=\binom{n}{x}\cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

La distribuzione binomiale si applica tutte le volte che conosciamo *a priori* la probabilità di successo p: il valore medio è μ=n·p e la varianza σ^2=n·p·(1-p) .
In questo esempio dove c'è k leggi x:

Esempio 6.1: Viene lanciata 6 volte una moneta oppure, il che è equivalente, vengono lanciate sei monete; sia testa il successo. Allora $n=6$ e $p=q=\frac{1}{2}$.

(i) La probabilità che si presentino esattamente due teste (e cioè, $k=2$) è

$$b(2;6,\tfrac{1}{2}) = \binom{6}{2}(\tfrac{1}{2})^2(\tfrac{1}{2})^4 = \tfrac{15}{64}$$

(ii) La probabilità di ottenere almeno quattro teste (e cioè $k=4{,}5$ o 6) è

$$b(4;6,\tfrac{1}{2})+b(5;6,\tfrac{1}{2})+b(6;6,\tfrac{1}{2}) = \binom{6}{4}(\tfrac{1}{2})^4(\tfrac{1}{2})^2+\binom{6}{5}(\tfrac{1}{2})^5(\tfrac{1}{2})+\binom{6}{6}(\tfrac{1}{2})^6$$
$$= \tfrac{15}{64}+\tfrac{6}{64}+\tfrac{1}{64} = \tfrac{11}{32}$$

(iii) La probabilità che testa non si presenti affatto (cioè, che siano tutti insuccessi) è $q^6=(\frac{1}{2})^6=\frac{1}{64}$, e pertanto la probabilità di ottenere almeno una testa è $1-q^6=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$.

Problema 2: sorteggio senza reimbussolamento (Distr. ipergeometrica)

In questo caso la probabilità di avere x successi è data:

$$P(x)=\frac{\binom{Bianche}{x}\cdot\binom{Nere}{n-x}}{\binom{Bianche+Nere}{n}}$$

I casi favorevoli sono il prodotto dei modi in cui posso sciegliere *x palline bianche tra le bianche,* e *n-x palline nere tra le nere* (regola d'oro). A denominatore ci sono le possibilità totale.

Problema 3: conoscenza della media (Distr. di Poisson)

Corrisponde al caso in cui non conosciamo la probabilità p di successo ma *soltato quante volte* μ *in media si verifica il successo.*

$$P(x)=\frac{e^{-\mu}\cdot\mu^x}{x!}$$

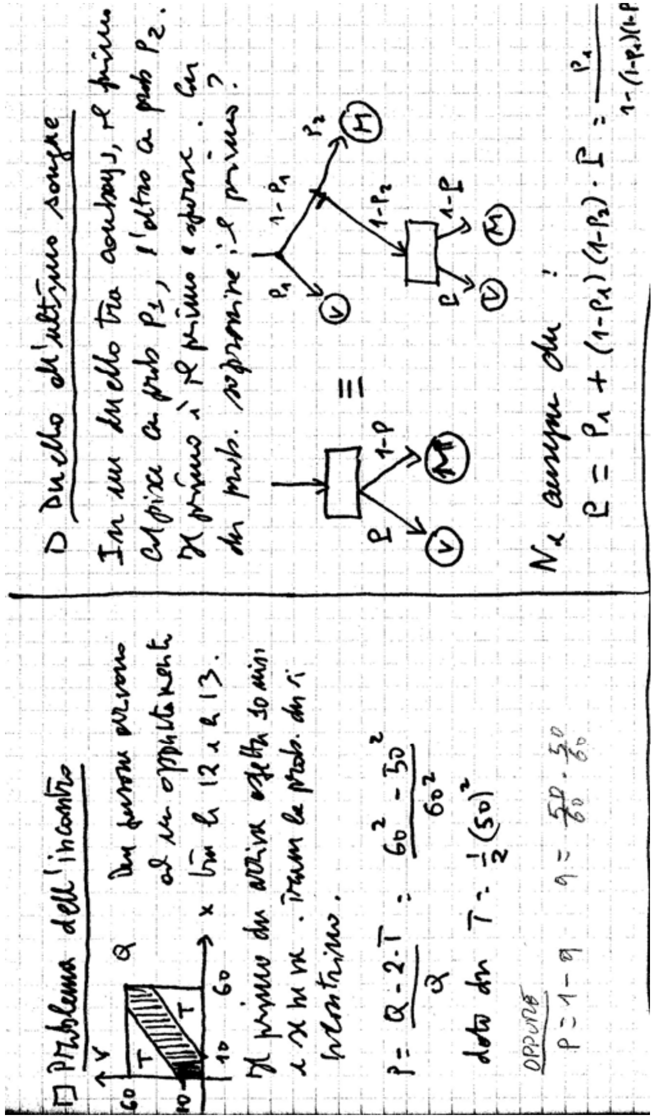
Può essere derivata dalla distr. binomiale, quando la probabilità che l'evento si *verifichi p è molto piccola* ma vengono *fatte moltissimi tentativi n*, per cui in media se ne verificano μ=n·p. La sua varianza è $\sigma^2=\mu$

Tipico problema in cui può essere applicata: qual'è la probabilità P(x) che io riceva, in un dato anno scolastico, x insufficienze, quando mediamente ne ricevo soltanto μ all'anno?

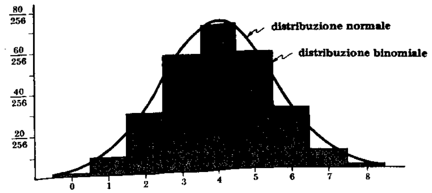
6.24. **Si supponga che il 2% dei pezzi prodotti da una fabbrica siano difettosi. Si determini la probabilità P che in un campione di 100 pezzi ve ne siano 3 difettosi.**

Si può applicare la distribuzione binomiale con $n = 100$ e $p = .02$. Tuttavia, poiché p è piccolo, applichiamo l'approssimazione di Poisson, con $\lambda = np = 2$. Pertanto

$$P = p(3;2) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 8(.135)/6 = .180$$



La distribuzione di Gauss o Normale.

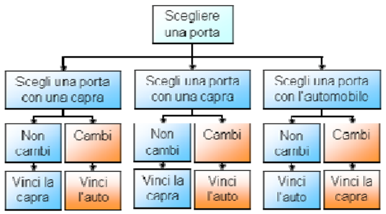


Raffronto fra la distribuzione binomiale e quella normale

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$$

E' utile per approssimare la distr. binomiale, tutte le volte che il *numero di prove n è abbastanza grande.* Per usarla occorre sostituire i valori $\mu=n\cdot p$ e $\sigma^2=n\cdot p\cdot(1-p)$ corrispondenti alla binomiale.
Nella figura è rappresentato un confronto tra binomiale n=8, p=1/2 (in nero) e normale.

Il famoso problema di Monty-Hall



Un gioco a premi funziona in questo modo: devi scegliere tra 3 porte. Dietro una delle porte c'e' un auto e dietro le altre due ci sono due capre. Fatta la tua scelta, la porta non viene subito aperta, ma il conduttore ti apre una delle porte con la capra (lui sa dove si trovano le capre) e ti dice: "hai la possibilità di cambiare la tua scelta, con la porta che è ancora chiusa. Cosa fai?".

Passare all'altra porta migliora le chance di vittoria? La risposta è si: la probabilità passa da 1/3 a 2/3.

Problemi di Calcolo Combinatorio

Se non sono permesse ripetizioni, (i) quanti numeri di 3 cifre si possono formare dalle sei cifre 2, 3, 5, 6, 7 e 9? (ii) Quanti fra questi numeri sono minori di 400? (iii) Quanti sono pari? (iv) Quanti sono dispari? (v) Quanti sono multipli di 5?

Per ciascun caso disegnamo tre quadrati $\square\ \square\ \square$ che rappresentano un numero arbitrario, e scriviamo in ogni quadrato il numero di cifre che vi si possono porre.

(i) Il quadrato a sinistra si può riempire in 6 modi; dopo questo, il secondo si può riempire in 5 modi; infine, il quadrato a destra si può riempire in 4 modi: $\boxed{6}\ \boxed{5}\ \boxed{4}$. Quindi si possono formare $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ numeri.

(ii) Il quadrato a sinistra può essere riempito solo in 2 modi, da 2 o da 3, poiché ogni numero deve essere minore di 400; il quadrato di mezzo può essere riempito in 5 modi; e, infine, il quadrato a destra può essere riempito in 4 modi: $\boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{4}$. Quindi ci sono $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ numeri.

(iii) Il quadrato a destra può essere riempito in 2 soli modi, da 2 o da 6, poiché i numeri devono essere pari, il quadrato a sinistra può essere riempito in 5 modi; e, infine, il quadrato di mezzo può essere riempito in 4 modi: $\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{2}$. Quindi ci sono $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$ numeri.

(iv) Il quadrato a destra può essere riempito solo in 4 modi, da 3, 5, 7 o 9, poiché i numeri devono essere dispari; il quadrato a sinistra può essere riempito in 5 modi; e, infine, il quadrato di mezzo può essere riempito in 4 modi: $\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{4}$. Quindi ci sono $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ numeri.

Disposizioni e permutazioni

2.36. Trovare il numero di modi in cui 6 persone possono viaggiare in toboga se uno dei tre deve guidare.

2.37. (i) Trovare il numero di modi in cui cinque persone possono mettersi in fila.
(ii) Quanti sono i modi se due delle persone vogliono mettersi una dietro l'altra?

2.38. Risolvere il problema precedente per il caso che le persone si dispongano intorno a un tavolo circolare.

2.39. (i) Trovare il numero di parole di quattro lettere che si possono formare con le lettere della parola STRINGA. (ii) Quante di queste sono formate solo da consonanti? (iii) Quante di queste cominciano e finiscono con una consonante? (iv) Quante di queste cominciano con una vocale? (v) Quante contengono la lettera R? (vi) Quante cominciano con T e finiscono con una vocale? (vii) Quante cominciano con T e contengono anche S? (viii) Quante contengono entrambe le vocali?

2.40. Quanti distinti segnali, ognuno formato da 8 bandiere allineate verticalmente, si possono formare con 4 bandiere rosse, 2 bandiere azzurre, e 2 bandiere verdi?

2.41. Trovare il numero di permutazioni che si possono formare con tutte le lettere di ognuna delle seguenti parole: (i) rotto, (ii) connotati, (iii) immaginario, (iv) connesso.

2.42. (i) Trovare il numero dei modi in cui 4 ragazzi e 4 ragazze possono sedersi in fila se devono alternarsi.
(ii) Trovare il numero di modi in cui 4 ragazzi e 4 ragazze possono sedersi in fila se hanno posti alternati e se un ragazzo e una ragazza devono avere posti adiacenti.
(iii) Trovare il numero di modi se hanno posti alternati e se un ragazzo e una ragazza non possono avere posti adiacenti.

2.43. Risolvere i problemi precedenti per il caso che essi si dispongano intorno a un tavolo circolare.

COMBINAZIONI

2.55. Una classe è formata da 9 ragazzi e 3 ragazze. (i) In quanti modi l'insegnante può scegliere una commissione di 4? (ii) Quante commissioni conterranno al minimo una ragazza? (iii) Quante commissioni conterranno esattamente una ragazza?

2.56. Una donna ha 11 amici. (i) In quanti modi può invitarne 5 a pranzo? (ii) In quanti modi se due amici sono sposati e non partecipano separatamente? (iii) In quanti modi se due di essi non sono in buoni rapporti e non partecipano insieme?

2.57. Prendiamo nel piano 10 punti A, B, . . . in modo che non ce ne siano tre sulla stessa linea. (i) Quante linee vengono determinate dai punti? (ii) Quante di queste linee non passano per A o per B? (iii) Quanti triangoli vengono determinati dai punti? (iv) Quanti di questi triangoli contengono il punto A? (v) Quanti di questi triangoli contengono il lato AB?

2.58. Nel corso di un esame, uno studente deve rispondere a 10 domande su 13. (i) Quante alternative ha? (ii) Quante ne ha se deve rispondere alle prime cinque domande? (iii) Quante ne ha se deve rispondere alla prima o alla seconda domanda, ma non a tutte e due? (iv) Quante ne ha se deve rispondere per forza a 3 delle prime 5 domande? (v) Quante ne ha se deve rispondere almeno a 3 delle prime 5 domande?

2.59. Un uomo ha ricevuto una mano di poker (5 carte) da un comune mazzo di carte da gioco. In quanti modi poteva ottenere (i) scala reale, (ii) quattro carte dello stesso tipo, (iii) una scala, (iv) una coppia di assi, (v) due carte dello stesso tipo (una coppia)?

2.59. Un uomo ha ricevuto una mano di poker (5 carte) da un comune mazzo di carte da gioco. In quanti modi poteva ottenere (i) scala reale, (ii) quattro carte dello stesso tipo, (iii) una scala, (iv) una coppia di assi, (v) due carte dello stesso tipo (una coppia)?

2.60. L'alfabeto inglese è formato da 26 lettere di cui 5 sono vocali.

(i) Quante parole di 5 lettere con 3 consonanti distinte e 2 vocali distinte si possono formare?
(ii) Quante di queste contengono la lettera b?
(iii) Quante di queste contengono le lettere b e c?
(iv) Quante di queste cominciano con b e contengono la lettera c?
(v) Quante di queste cominciano con b e finiscono con c?
(vi) Quante di queste contengono le lettere a e b?
(vii) Quante di queste cominciano con a e contengono b?
(viii) Quante di queste cominciano con b e contengono a?
(ix) Quante di queste cominciano con a e finiscono con b?
(x) Quante di queste contengono le lettere a, b e c?

Esempi svolti di Calcolo delle Probabilità

Esempi generici

Esempio 3.7: Si scelga a caso una carta da un comune mazzo di 52 carte. Sia

$A = \{$ la carta è di picche $\}$

e $B = \{$ la carta è una figura, ossia fante, regina o re $\}$

Calcoliamo $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$. Poiché abbiamo uno spazio equiprobabile,

$$P(A) = \frac{\text{numero delle carte di picche}}{\text{numero delle carte}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \qquad P(B) = \frac{\text{numero delle figure}}{\text{numero delle carte}} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{numero delle figure di picche}}{\text{numero delle carte}} = \frac{3}{52}$$

3.10. Due carte vengono estratte a caso da un comune mazzo di 52 carte. Trovare la probabilità p che (i) siano entrambe di picche, (ii) una sia di picche e una sia di cuori.

Vi sono $\binom{52}{2} = 1326$ modi di estrarre 2 carte da 52 carte.

(i) Vi sono $\binom{13}{2} = 78$ modi di estrarre 2 carte di picche da 13 carte di picche; quindi

$$p = \frac{\text{numero dei modi in cui si possono estrarre due carte di picche}}{\text{numero dei modi in cui si possono estrarre due carte}} = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$$

(ii) Poiché vi sono 13 carte di picche e 13 di cuori, vi sono $13 \cdot 13 = 169$ modi di estrarre una carta di picche e una di cuori; quindi $p = \frac{169}{1326} = \frac{13}{102}$.

3.12. Due carte sono estratte a caso da 10 carte numerate da 1 a 10. Determinare la probabilit p che la somma sia dispari se (i) le due carte vengono estratte insieme, (ii) le due carte vengono estratte l'una dopo l'altra senza reinserimento nel mazzo, (iii) le due carte vengono estratte l'una dopo l'altra con reinserimento nel mazzo.

(i) Vi sono $\binom{10}{2} = 45$ modi di estrarre 2 carte da 10. La somma è dispari se un numero è dispari e l'altro è pari. Vi sono 5 numeri pari e 5 numeri dispari; quindi vi sono $5 \cdot 5 = 25$ modi di estrarre un numero pari e un numero dispari. Pertanto $p = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$.

(ii) Vi sono $10 \cdot 9 = 90$ modi di estrarre due carte l'una dopo l'altra senza reinserimento. Vi sono $5 \cdot 5 = 25$ modi di estrarre un numero pari e poi un numero dispari, e $5 \cdot 5 = 25$ modi di estrarre un numero dispari e poi un numero pari; quindi $p = \frac{25+25}{90} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$.

(iii) Vi sono $10 \cdot 10 = 100$ modi di estrarre due carte l'una dopo l'altra con reinserimento. Come in (ii), vi sono $5 \cdot 5 = 25$ modi di estrarre un numero pari e poi un numero dispari, e $5 \cdot 5 =$ 25 modi di estrarre un numero dispari e poi un numero pari; quindi $p = \frac{25+25}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Sul Teorema della moltiplicazione

4.8. Ad un uomo vengono distribuite 5 carte, una dopo l'altra, da un comune mazzo di 52 carte. Qual è la probabilità p che esse siano tutte di picche?

La probabilità che la prima carta sia di picche è 13/52; che la seconda sia di picche, è 12/51; che la terza sia di picche, è 11/50; che la quarta sia di picche è 10/49; e che l'ultima sia di picche, è 9/48. (In ciascun caso abbiamo ipotizzato che le carte precedenti fossero di picche.) Pertanto $p = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} \cdot \frac{9}{48} = \frac{33}{66\,640}$.

4.9. Un'urna contiene 7 palline rosse e 3 palline bianche. Tre palline vengono estrarre dall'urna, una dopo l'altra. Determinare la probabilità p che le prime due siano rosse e la terza sia bianca.

La probabilità che la prima pallina sia rossa è 7/10, poiché vi sono 7 palline rosse su 10 palline. Se la prima pallina è rossa, allora la probabilità che la seconda pallina sia rossa è 6/9, poiché rimangono 6 palline rosse su 9 palline. Se le prime due palline sono rosse, allora la probabilità che la terza pallina sia bianca è 3/8, poiché vi sono 3 palline bianche sulle 8 palline contenute nell'urna. Quindi, per il teorema di moltiplicazione,

$$p = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{40}$$

Problemi da risolvere

3.30. Una moneta viene modificata in modo da rendere il presentarsi di testa tre volte più probabile del presentarsi di croce. Determinate $P(T)$ e $P(C)$.

3.31. Tre studenti, A, B e C, sono impegnati in una gara di nuoto. A e B hanno la stessa probabilità di vittoria, e ciascuno di loro ha probabilità di vittoria doppia di quella di C. Determinare la probabilità che vinca B o C.

3.32. Un dado viene tarato in modo tale che i numeri pari hanno la stessa probabilità di presentarsi, i numeri dispari hanno la stessa probabilità di presentarsi, e ciascun numero pari ha probabilità di presentarsi doppia di quella di ciascun numero dispari. Determinare la probabilità che (i) si presenti un numero pari, (ii) si presenti un numero primo, (iii) si presenti un numero dispari, (iv) si presenti un numero primo dispari.

3.33. Determinare la probabilità di un evento se esso è dato (i) a 2 contro 1, (ii) a 5 contro 11.

3.34. In una gara di nuoto, la vittoria di A è data a 2 contro 3, la vittoria di B è data a 1 contro 4. Determinare la probabilità p che A o B vinca la gara, e il rapporto $p/(1-p)$ relativo a questo evento.

SPAZI EQUIPROBABILI FINITI

3.35. Una classe è composta da 5 matricole, 4 studenti del secondo anno, 8 del terzo anno e 3 del quarto anno. Si sceglie a caso uno studente per rappresentare la classe. Determinare la probabilità che questo studente sia (i) del secondo anno, (ii) del quarto anno, (iii) del terzo o del quarto anno.

3.36. Si estragga a caso una carta fra 50 carte numerate da 1 a 50. Determinare la probabilità che il numero della carta sia (i) divisibile per 5, (ii) primo, (iii) finisca con la cifra 2.

3.37. Su 10 ragazze di una classe, 3 hanno occhi azzurri. Due ragazze vengono scelte a caso: qual è la probabilità che (i) entrambe abbiano occhi azzurri, (ii) nessuna delle due abbia occhi azzurri, (iii) almeno ur

Problemi sulle Variabili Casuali

VARIABILI CASUALI

5.26. Determinare il valor medio μ, la varianza σ^2 e lo scarto quadratico medio σ di ciascuna delle funzioni di probabilità:

(i)

x_i	2	3	8
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(ii)

x_i	-2	-1	7
$f(x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

(iii)

x_i	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	.3	.1	.1	.3	.2

5.27. Si lanci una coppia di dadi. Sia X la variabile casuale che designa il minimo fra i due numeri che si presentano. Determinare la funzione di probabilità, il valor medio, la varianza e lo scarto quadratico m di X.

5.28. Si lanci quattro volte una moneta. Supponiamo che X designi il numero delle volte che si è presenta testa. Si determinino la funzione di probabilità, il valor medio, la varianza e lo scarto quadratico me di X.

5.29. Si lanci quattro volte una moneta. Designamo con Y la più lunga sequenza di teste che si presenta. S determinino la funzione di probabilità, il valor medio, la varianza e lo scostamento quadratico medi

5.30. Si determinino il valor medio μ, la varianza σ^2 e lo scarto quadratico medio σ della funzione di probabilità di due punti:

x_i	a	b
$f(x_i)$	p	q

dove $p+q=1$.

.31. Si estraggano a caso due carte da una scatola che contiene cinque carte numerate 1, 1, 2, 2, e 3. Designamo con Y il massimo fra i due numeri estratti, e con X la loro somma. Si determinino la funzione probabilità, il valor medio, la varianza, e lo scarto quadratico medio di (i) X, (ii) Y, (iii) $X+Y$, (iv) X

'ERANZA MATEMATICA

NE DI PROBABILITA' CONGIUNTA, VARIABILI CASUALI I

Si consideri la seguente funzione di probabilità congiunta di X e

$X \backslash Y$	-4	2	7	Somma
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
Somma	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	

Si determini (i) $E(X)$ ed $E(Y)$, (ii) Cov (X, Y), (iii) σ_X, σ_Y e $\rho($

Si consideri la seguente tabella a doppia entrata ricavata dalla fu di X e Y:

$X \backslash Y$	-2	-1	4	5	Som
1	.1	.2	0	.3	
2	.2	.1	.1	0	
Somma	.3	.3	.1	.3	

Si determini (i) $E(X)$ ed $E(Y)$, (ii) Cov (X, Y), (iii) σ_X, σ_Y e ρ

5.43. Si supponga che X e Y siano variabili casuali indipendenti aventi rispettivamente le seguenti funzioni di probabilità:

x_i	1	2
$f(x_i)$	.7	.3

y_j	-2	5	8
$g(y_j)$	.3	.5	.2

Si determini la funzione di probabilità congiunta di X e Y, e si verifichi che Cov $(X, Y)=0$.

5.44. Si lanci quattro volte una moneta. Designamo con X il numero di teste e con Y la più lunga sequenza d teste (si vedano i problemi 5.28 e 5.29). (i) Si determini la funzione di probabilità congiunta di X e Y. (ii) Si determini Cov(X, Y) e $\rho(X, Y)$.

5.45. Si estraggano a caso due carte da una scatola contenente cinque carte numerate 1, 1, 2, 2 e 3. Designamo con Y il massimo fra i due numeri estratti e con X la loro somma (cfr. problema 5.31). (i) Si determini la funzione di probabilità congiunta di X e Y. Si determini Cov (X, Y) e $\rho(X, Y)$.

Problemi sulle distribuzioni

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

6.31. Si determini (i) $b(1; 5, \frac{1}{3})$, (ii) $b(2; 7, \frac{1}{2})$, (iii) $b(2; 4, \frac{1}{4})$.

6.32. Si estrae per tre volte una carta da un comune mazzo di 52 carte, reinserendola ogni volta nel mazz(Si determini la probabilità che (i) vengano estratte due carte di cuori, (ii) vengano estratte tre carte (cuori, (iii) venga estratta almeno una carta di cuori.

6.33. La media di battuta di un giocatore di baseball è di .300. Se egli va alla battuta 4 volte, qual è la pro bilità che colpisca la palla (i) due volte, (ii) almeno una volta?

6.34. Una scatola contiene 3 palline rosse e 2 palline bianche. Si estrae e si reimbussola tre volte una pallir Si determini la probabilità che (i) sia stata estratta 1 pallina rossa, (ii) siano state estratte 2 palline rc se, (iii) sia stata estratta almeno una pallina rossa.

6.35. La squadra A ha probabilità $\frac{2}{3}$ di vincere ogniqualvolta gioca. A gioca 4 partite: si determini la prc babilità che A vinca (i) 2 partite, (ii) almeno 1 partita, (iii) più della metà delle partite.

6.36. Si estrae e si reinserisce una carta in un comune mazzo di 52 carte. Quante volte si deve estrarre una carta affinché (i) la probabilità di estrarre una carta di cuori sia almeno uguale a quella di non estrar] (ii) la probabilità di estrarre una carta di cuori sia maggiore di $\frac{3}{4}$?

Distribuzione normale

6.46. Si supponga che i pesi di 2000 studenti maschi siano distribuiti normalmente con valor medio uguale a 155 libbre e scarto quadratico medio uguale a 20 libbre. Si determini il numero di studenti con peso (i) inferiore o uguale a 100 libbre, (ii) fra 120 e 130 libbre, (iii) fra 150 e 175 libbre, (iv) superiore o uguale a 200 libbre.

6.47. Si supponga che i diametri delle viti prodotte da una certa fabbrica siano distribuiti normalmente, con valor medio di .25 centimetri e scarto quadratico medio di .02 centimetri. Una vite viene considerata difettosa se il suo diametro è $\leqslant$.20 centimetri o $\geqslant$.28 centimetri. Si trovi la percentuale di viti difettose prodotte da quella fabbrica.

6.48. Si supponga che i punteggi relativi ad un esame siano distribuiti normalmente, con valor medio 76 e scarto quadratico medio 15. Il 15% superiore degli studenti viene classificato "A", e il 10% inferiore viene classificato "F". Si determini (i) il punteggio minimo occorrente per venire classificati "A" e (ii) il punteggio minimo occorrente per venire promossi (per non venire classificati "F").

APPROSSIMAZIONE NORMALE DELLA DISTRIBUZIONE BINOMIALE

6.49. Si lancia 10 volte una moneta. Si determini la probabilità di ottenere un numero di teste fra 4 e 7 (compresi) impiegando (i) la distribuzione binomiale, (ii) l'approssimazione normale della distribuzione binomiale.

6.50. Viene lanciata 400 volte una moneta. Si determini la probabilità che il numero di teste che si presenta differisca da 200 in ragione di (i) più di 10 unità, (ii) più di 25 unità.

6.51. Un dado viene lanciato 720 volte. Si determini la probabilità che il numero 6 si presenti (i) fra 100 e 125 volte (comprese), (ii) più di 150 volte.

DISTRIBUZIONE DI POISSON

6.53. Si determini (i) $e^{-1.6}$, (ii) $e^{-2.3}$.

6.54. Con riferimento alla distribuzione di Poisson $p(k; \lambda)$, si determini (i) $p(2; 1.5)$, (ii) $p(3; 1)$, (iii) $p(2; .6)$.

6.55. Si supponga che 220 errori di stampa siano distribuiti a caso in un libro di 200 pagine. Si determini la probabilità che una data pagina contenga (i) nessun errore, (ii) 1 errore, (iii) 2 errori, (iv) 2 o più errori.

6.56. Si supponga che l'1% dei pezzi prodotti da una macchina sia difettoso. Si determini la probabilità che in un campione di 100 pezzi ve ne siano 3 o più difettosi.

6.57. Si supponga che mediamente il 2% delle persone siano mancine. Si determini la probabilità che fra 100 persone ve ne siano 3 o più mancine.

6.58. Si supponga che vi sia una media di 2 suicidi all'anno su di una popolazione di 50 000. Si determini la probabilità che in una città di 100 000 si verifichino in un dato anno (i) 0, (ii) 1, (iii) 2, (iv) 2 o più suicidi.

Problemi risolti sulla distribuzione binomiale

6.4. Una famiglia ha 6 figli. Si determini la probabilità P che vi siano (i) 3 maschi e 3 femmin((ii) meno maschi che femmine. Si supponga che la probabilità che ogni determinato figli(sia maschio è $\frac{1}{2}$.

Qui $n = 6$ e $p = q = \frac{1}{2}$.

(i) $P = P(3 \text{ maschi}) = \binom{6}{3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^3 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$.

(ii) Vi sono meno maschi che femmine se vi sono 0, 1 o 2 maschi. Quindi

$$P = P(0 \text{ maschi}) + P(1 \text{ maschio}) + P(2 \text{ maschi}) = (\tfrac{1}{2})^6 + \binom{6}{1}(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})^5 + \binom{6}{2}(\tfrac{1}{2})^2(\tfrac{1}{2})^4 = \tfrac{11}{32}$$

6.5. Quanti dadi si debbono lanciare affinché la probabilità di ottenere un sei sia maggiore di quella di non ottenerlo?

La probabilità di non ottenere un sei su n dadi è $(\frac{5}{6})^n$. Quindi dobbiamo determinare il più piccolo valore di n per cui $(\frac{5}{6})^n$ è *minore* di $\frac{1}{2}$:

$$(\tfrac{5}{6})^1 = \tfrac{5}{6}; \quad (\tfrac{5}{6})^2 = \tfrac{25}{36}; \quad (\tfrac{5}{6})^3 = \tfrac{125}{216}; \quad \text{ma} \quad (\tfrac{5}{6})^4 = \tfrac{625}{1296} < \tfrac{1}{2}$$

Pertanto si debbono lanciare 4 dadi.