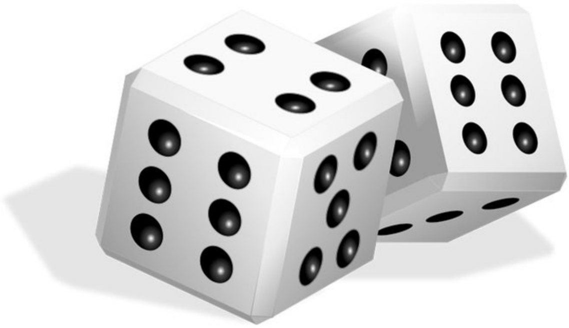
Michele Andreoli



Metodi Algebrici
nel Calcolo Combinatorio

www.micheleandreoli.org

Version 5.0

DISCLAIMER

This document, including all graphics, data & text processing, is realized using Free Software only, as *Linux Ubuntu, LaTeX, LyX, Bash, GNU C and Python.*

Prefazione

In questo libro vengono rivisitati alcuni risultati del calcolo delle combinazioni, usando metodi algebrici.

Normalmente, i problemi di tipo combinatoriale vengono affrontati con conteggi diretti e facendo uso di strumenti ben codificati, quali combinazioni, permutazioni, disposizioni, *etc. L'approccio classico è efficace ma molto dispersivo, perché richiede che lo studente ricordi e sappia maneggiare una gran quantità di formule. L'approccio algebrico, invece, poiché quel che che occorre è semplicemente sviluppare un'espressione polinomiale ed estrarre qualche coefficiente numerico, permette una visione unitaria, altrimenti difficile da raggiungere.*

L'idea è che il metodo algebrico debba affiancare quello combinatoriale, non sostituirlo, perché, se senza dubbio esso è superiore quanto ad eleganza e generalità, spesso anche è più difficile.

Il libro è rivolto essenzialmente allo studente curioso, che voglia approfondire per conto proprio, e ai colleghi docenti che vogliono trarre qualche suggerimento o spunto di riflessione. Le conoscenze necessarie sono: elementi di calcolo combinatorio, sviluppi in serie di potenze della funzione esponenziale, del seno e del coseno iperbolico, del logaritmo naturale, la serie geometrica, etc. anche se qualche nozione di teoria dei gruppi, teoria dei grafi e calcolo differenziale non guasterebbe.

Infine, l'accesso ad un programma per il calcolo simbolico (tipo Mathematica© *o* Maxima*) è fortemente consigliato, perché alcuni dei metodi presentati prevedono lo sviluppo di potenze elevate di polinomi.*

Michele Andreoli

Pisa, 28 giugno 2023

Indice

---

(1) Argomento avanzato

Capitolo 1

Metodi algebrici

L'uso dei metodi dell'Algebra nel Calcolo delle Combinazioni si basa su una interpretazione del prodotto tra polinomi in termini combinatoriali.

Problema. *Quanti numeri di 7 cifre si possono formare accostando tra loro 3 sequenze numeriche scelte nel seguente insieme*

$$A = 1, 2, 3, 4, 21, 13, 128, 531, 283, 70000?$$

Esempio: 3-128-128, 70000-2-1, etc,etc

Contare «a manina» le varie possibilità sarebbe (ammettiamolo) piuttosto noioso.

Invece, con l'Algebra, la cosa è semplice quanto sviluppare l'espressione:

$$\left(4x + 2x^2 + 3x^3 + x^5\right)^3 = 64x^3 + 96x^4 + 192x^5 + 152x^6 + 192x^7 + 102x^8 + 111x^9 + 36x^{10} + 39x^{11} + 6x^{12} + 9x^{13} + x^{15} + O\left(x^{16}\right)$$

e prendere dal risultato il coefficiente che moltiplica x^7.

Soluzione. 192.

1.1. Come funziona?

Partiamo dal polinomio $A(x) = 4x + 2x^2 + 3x^3 + x^5$. In esso le sequenze dell'insieme A di lunghezza r sono state codificate con la potenza x^r, moltiplicata per un coefficiente a_r, che ne indica il numero: 4 oggetti di tipo x, 2 oggetti di tipo x^2, 3 oggetti di tipo x^3 e uno di tipo x^5.

Dovendo prendere 3 sequenze, abbiamo sviluppato $A^3(x)$, e raccolto tutti i termini che contribuiscono alla potenza x^7, quali, per esempio, termini del tipo:

$$\left(\cdots + 3x^3 + \cdots\right)\left(\cdots + 4x + \cdots\right)\left(\cdots + 3x^3 + \cdots\right) = 36x^7$$

o anche

$$\left(\cdots + 4x + \cdots\right)\left(\cdots + 4x + \cdots\right)\left(\cdots + x^5 + \cdots\right) = 16x^7$$

per poi sommare tutti i possibili contributi.

Esempio. Consideriamo il prodotto:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Come si può verificare, il coefficiente di a^2b non è altro che *il numero di modi in cui possiamo scegliere 2 «a» e un solo «b»* tra i 3 fattori che compongono il prodotto. E questo numero è proprio $\binom{3}{2} = 3$.

E così per gli altri coefficienti.

1.2. Funzioni Generatrici

Le funzioni generatrici rappresentano gli oggetti di «dimensione» r (o di «peso» r) come potenze x^r. Dunque, x rappresenterà un oggetto di dimensione 1, $x^2 = xx$ un oggetto di dimensione 2, $x^3 = xxx$, etc, mentre x^0 (che è l'insieme vuoto {}) verrebbe rappresentato come 1.

Consideriamo ora una collezione di oggetti A nel quale ve ne siano a_r di dimensione r. A questi insiemi/collezioni è possibile associare delle funzioni, dette *funzioni generatrici*, costruite in modo che alle operazioni insiemistiche corrispondano operazioni *algebriche* sulle funzioni stesse.

1.2.1. Generatrici standard

Se gli oggetti di dimensione r *non sono* distinguibili per il loro ordinamento, è comodo associare alla successione a_r la semplice serie di potenze:

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

che chiameremo generatrice *standard* della successione.

Esempio. All'insieme $A = \{\{\}, a, aa, bb, ccc\}$ verrebbe associata la funzione $A(x) = 1 + x + 2x^2 + x^3$; alla successione $\{1, 1, 1, \dots\}$ verrebbe associata la funzione $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$, etc.

Se l'insieme A è infinito, a rigore, dovremmo chiederci «se la serie converge» o meno. In realtà, le funzioni generatrici sono delle *serie formali*: esse sono soltanto un modo alternativo per rappresentare una successione di numeri a_r, trascurando ogni questione di convergenza.

Prendiamo ora due generatrici standard $A(x)$ e $B(x)$:

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \quad B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$$

All'operazione somma:

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) = &(a_0 + b_0) + x\,(a_1 + b_1) + x^2\,(a_2 + b_2) + \\ &x^3\,(a_3 + b_3) + x^4\,(a_4 + b_4) + x^5\,(a_5 + b_5) + O\left(x^6\right) \end{aligned}$$

è associata la successione c_r:

$$\boxed{c_r = a_r + b_r}$$

mentre all'operazione prodotto:

$$\begin{aligned} A(x)\cdot B(x) = &a_0b_0 + x\left(a_1b_0 + a_0b_1\right) + x^2\left(a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2\right) + \\ &x^3\left(a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3\right) + \\ &x^4\left(a_4b_0 + a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3 + a_0b_4\right) + \\ &x^5\left(a_5b_0 + a_4b_1 + a_3b_2 + a_2b_3 + a_1b_4 + a_0b_5\right) + O\left(x^6\right) \end{aligned}$$

è associata la successione c_r:

$$\boxed{c_r = \sum_{i+j=r} a_i b_j}$$

Se alla somma è naturale associare *l'unione* dei due classi combinatoriali $C = A \cup B$, al prodotto corrispondono *oggetti nuovi*, formati combinando parti di A e parti di B: un oggetto di tipo C di dimensione r, si costruisce assemblando oggetti A di dimensione i con oggetti B di dimensione j in $a_i b_j$ modi, purché $r = i + j$.

In effetti, C non che è il prodotto cartesiano $C = A \times B$, cioè l'insieme $\{(a,b\}, a \in A, b \in B\}$.

1.2.2. Generatrici esponenziali (EGF)

Quello appena visto non è l'unico modo per associare una funzione ad un insieme. Se le strutture di dimensione r sono distinguibili, conviene usare la «densità relativa» $\frac{a_r}{r!}$ (rispetto al totale delle permutazioni $r!$ di r oggetti) invece che la «densità assoluta» a_r (generatrice *esponenziale)*

$$A(x) = \sum_r \frac{a_r}{r!} x^r$$

Con questa definizione [1], quando si fa il prodotto di due funzioni $A(x)$ e $B(x)$, i coefficienti $\frac{a_r}{r!}$ si combinano un po' come fanno le probabilità: moltiplicandosi e sommandosi. Per rendersene conto, pensiamo in termini di *strutture*. Il numero di strutture C di peso r costruibili con a_i strutture di tipo A e b_j strutture di tipo B (con $i + j = r$) sono infatti $a_i b_j$, scelta che possiamo fare in $\frac{r!}{i!j!}$ modi, per un totale di

$$\boxed{c_r = \sum_{i+j=r} \frac{r!}{i!j!} a_i b_j}$$

Introducendo le potenze di x e sommando sull'indice r, avremo:

$$\sum_r \frac{c_r}{r!} x^r = \sum_r \sum_{i+j=r} \frac{a_i}{i!} \frac{b_i}{j!} x^i x^j$$

e cioè

$$C(x) = A(x) \cdot B(x)$$

dove:

$$A(x) = \textstyle\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{r!} x^r, \quad B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{b_r}{r!} x^r, \quad C(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_r}{r!} x^r$$

I numeri c_r, che avremmo dovuto calcolare con complessi conteggi, si possono quindi ricavare come coefficienti di una serie, ottenibile con un semplice prodotto algebrico tra due funzioni.

1.3. Un assaggio dei due metodi

Problema. *In quanti modi si possono sistemare 10 palline in 8 scatole, massimo due palline a scatola, con la condizione che nessuna scatola resti vuota?*

---

[1] *Questo non è altro che lo sviluppo in serie di Taylor di punto x=0. I coefficienti* a_r *sono legati alla funzione attraverso la nota formula di Taylor* $a_r = f^{(r)}(0)$.

Qui l'ordine delle palline dentro le scatole non conta, per cui per indicare la possibilità di una pallina (x) e di due palline (x^2) scriviamo $A(x) = x + x^2$ e sviluppiamo $A^8(x)$:

$$(x + x^2)^8 = \ldots + \boxed{28}\, x^{10} + \ldots$$

Se ammettiamo anche scatole vuote, avremo invece:

$$(1 + x + x^2)^8 = \ldots + \boxed{784}\, x^{10} + \ldots$$

Problema. *In quanti modi si possono sistemare n=10 passeggeri in 3 carrozze, almeno un passeggero a carrozza?* [(2)]

Essendo le persone diverse una dall'altra, dobbiamo usare una EGF. Il «peso relativo» di un particolare gruppo, ad esempio tre persone, è $1/3!$, etc, per cui

$$A = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x - 1$$

Sviluppando $A^3(x)$ si ha:

$$(e^x - 1)^3 = \ldots + \boxed{55980}\, \frac{x^{10}}{10!} + \ldots$$

In generale, per n passeggeri su 3 carrozze, avremo:

$$(e^x - 1)^3 = \sum_n \boxed{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}\, \frac{x^n}{n!}$$

Se invece le carrozze sono k e il loro ordine non conta, è sufficiente sviluppare $\frac{(e^x-1)^k}{k!}$, cosa che conduce alle partizioni di un insieme e ai numeri di Stirling di II specie (vedi oltre).

(2) Per questo tipo di esercizi (che conducono ai numeri di Stirling di II specie) vedi oltre.

1.4. Espressioni regolari e Sequenze

Per «espressioni regolari» (*regexp* (3)) si intende una notazione basata su certi simboli quantificatori utili per indicare sequenze di simboli alfabetici (*stringhe*) in cui vi siano molte ripetizioni. In questo testo, verranno qualche volta usate come alternativa per rappresentare insiemi, anche infiniti. Alcuni di questi quantificatori sono ad esempio: $*$, che sta per «zero o più»; $+$, che sta per «uno o più»; mentre $\{1, 2, 3, \dots\}$ sta per «1,2,3 volte» etc.

Il simbolo « | » (*pipe*) sta invece per «or», per cui:

$$a|b \equiv \{a, b\}$$

Esempi di *regex*p

$$\begin{aligned} x^{\star} &= x^{\{0,1,2,3,\dots\}} = \{\{\}, x, xx, xxx, ...\} \\ x^{\{1,2\}} &= \{x, xx\} \\ x^{+} &= x^{\{1,2,3,\dots\}} = \{x, xx, xxx, ...\} \end{aligned}$$

Esempi con due lettere a e b:

$$\begin{aligned} (a|b)^* &= abbbbabaaaa.... \\ (a^{\{0,2,4\}}b)^2 &= bb, aabaab, aaaabaaaab \\ ab^* &= a, ab, abb, abbb, \dots \\ a^{+}b &= ab, aab, aaab, \dots \end{aligned}$$

(3) Termine mutuato dall'Informatica.

Sequenze infinite di una lettera

$$\begin{aligned}
x^{\{0,1\}} &= 1 + x \\
x^{\{0,1,2,3...\}} &= 1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x} \\
x^{\{1,2,3...\}} &= x + x^2 + ... = \frac{x}{1-x} \\
x^{\{0,2,4,6,8...\}} &= 1 + x^2 + x^4 + ... = \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}$$

Sequenze infinite di due lettere

$$\begin{aligned}
(a|b)^* = \{\{\}, \{a, b\}, \{aa, bb, ab, ba\}, \dots\} = \\
=1 + a + b + a^2 + b^2 + 2ab + \dots
\end{aligned}$$

Se il nostro scopo è il mero *conteggio* degli elementi di una data dimensione, è sufficiente sostituire a e b con x, ottenendo

$$(2x)^* = 1 + 2x + 4x^2 + 9x^3 + ... = \tfrac{1}{1-2x}$$

Altri esempi

Problema. *Quante sono le sequenze di n lettere* $\in \{a, b\}$ *nelle quali la lettera "a" compia di seguito al massimo due volte?*

Una versione equivalente sarebbe: *in quanti modi è possibile formare una fila indiana di n persone (maschi e femmine), avendo cura che non ci siano in successione mai più di due femmine?*

Soluzione. Indicando con «a» le femmine e «b» il maschi, consideriamo l'espressione

$$a^{\{0,1,2\}} \cdot (b \cdot a^{\{0,1,2\}})^\star$$

Per assegnarvi la relativa generatrice, sostituiamo $a^{\{0,1,2\}}$ con il polinomio $1 + x + x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$, b con x e la sequenza z^* con $\frac{1}{1-z}$, per cui:

$$(\frac{1-x^3}{1-x}) \cdot \frac{1}{1-x(\frac{1-x^3}{1-x})} = \frac{1-x^3}{1-2x+x^4}$$

che, sviluppata, dà:

$$1+2x+4x^2+7x^3+13x^4+24x^5+44x^6+81x^7+149x^8+274x^9+O\left(x^{10}\right)$$

Es: se n=9 la risposta è 274.

Problema. *Quante sono le sequenze di due lettere $\{a, b\}$, nelle quali le sottosequenze di "a" hanno lunghezze pari?*

Una versione equivalente sarebbe: *in quanti modi è possibile formare una fila indiana di n persone (maschi e femmine), avendo cura che le femmine in successione siano in numero pari?*

Soluzione. L'espressione adatta sarebbe:

$$a^{\{0,2,4,6,\ldots\}} \cdot \left(b \cdot a^{\{0,2,4,6,\ldots\}}\right)^{\star}$$

Quindi:

$$\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x(\frac{1}{1-x^2})} = \frac{1}{1-x-x^2}$$

cioè:

$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+8x^5+13x^6+21x^7+34x^8+55x^9+89x^{10}+144x^{11}+233x^{12}+377x^{13}+610x^{14}+987x^{15}+1597x^{16}+2584x^{17}+4181x^{18}+6765x^{19}+O\left(x^{20}\right)$

Qualcuno riconosce nella sequenza dei coefficienti la celebre *serie di Fibonacci?*

Capitolo 2

Generatrici Standard al lavoro

2.1. Palline identiche

Quando si parla di Calcolo Combinatorio, le scatole e le palline non possono assolutamente mancare. In questa prima parte, le palline sono identiche.

Problema modello:

> *Abbiamo n scatole numerate {A,B,C,D, ...}.*
>
> *In quanti modi possiamo mettervi dentro k palline identiche?*

Un modo istruttivo per costruire le configurazioni possibili è il seguente: rappresentiamo le n scatole con $n-1$ stanghette verticali |, e le k palline col simbolo $\bullet$:

$$|\bullet|\bullet|||\bullet||\bullet\ldots,$$

Due stanghette di seguito senza palline rappresentano scatole vuote.

Per n=4 e k=2, un possibile raggruppamento potrebbe essere

$$|\bullet|\bullet|$$

che significherebbe A=0, B=1,C=1 e D=0, cioè la configurazione BC=A^0BCD^0. Il raggruppamento

$$||\bullet\bullet|$$

significherebbe A=0, B=0,C=2 e D=0, cioè la configurazione CC, etc.

2.2. Set, Multisets, Composizioni e Partizioni

Cerchiamo ora di vedere le cose in termini algebrici e concentriamo sul caso di $n = 4$ scatole e $k = 2$ palline.

(Set) Se in ognuna delle 4 scatole possiamo mettere al massimo una pallina ($k_i \in [0, 1]$), abbiamo $(1 + x)^4$. Per ottenere il numero che ci serve, basta sviluppare il binomio ed estrarre il coefficiente di x^2 :

$$(1 + x)^4 = \cdots + \boxed{6}x^2 + \ldots$$

Le 6 configurazioni sono {AB, AC, AD, BC, BD, CD}. Esse sono le combinazioni semplici di n elementi presi k a k, cioè i sottinsiemi di dimensione k dell'insieme $[n] = \{1, 2, ..., n\}$.

(Multisets) Se invece non c'è limite alle palline ($k_i \in [0, \infty]$), avremo:

$$(1 + x + x^2 + \ldots)^4 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^4 = \cdots + \boxed{10}x^2 + \ldots$$

Il numero 10=6+4 si può ottenere sommando i 6 elementi già trovati {AB, AC, AD, BC, BD, CD} i 4 elementi AA , BB, CC, DD [(1)].

(1) intendendo AA come $A^2B^0C^0D^0$,etc

Quanto all'interpretazione, dato che un elemento può essere preso più volte, ora non possiamo più parlare di sottoinsiemi, ma di multi-insiemi *(multiset)*.

(Compositions) Se invece le scatole non possono essere vuote ($k_i \in [1, \infty]$), dobbiamo eliminare i termini $x^0 = 1$, ottenendo:

$$\begin{aligned}(x + x + x^2 + \dots)^4 &= \left(\frac{x}{1-x}\right)^4 = \\ &= x^4 + 4x^5 + 10x^6 + \boxed{20}\,x^7 + 35x^8 + \dots\end{aligned}$$

Osservando il secondo membro di questa equazione, scopriamo che il numero 7 si decompone in 4 parti non nulle in 20 modi. Notare che in questo tipo di decomposizione, conta l'ordine: $7 = 1 + 1 + 2 + 3$ è considerata diversa da $7 = 1 + 1 + 3 + 2$, perché le 4 scatole sono numerate.

(Partitions) Consideriamo ora un'ulteriore «variante» al problema. Supponiamo di avere $k = 32$ palline da mettere in $n = 3$ scatole, ma questa volta *con delle limitazioni*: la scatola 1 può contenere solo zero o due palline; la scatola 2 solo multipli di 2 e la scatola 3 solo 5,10,15,30, etc.

Mentre nei casi precedenti moltiplicavamo n funzioni uguali, ora abbiamo un fattore diverso per ogni scatola:

$$\begin{aligned}(1 + x^2)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(x^5 + x^{10} + \dots) &= \\ = (1 + x^2)\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{x^5}{1-x^5}\right) &= \\ = \dots + \boxed{6}\,x^{32} + \dots\end{aligned}$$

Lo sviluppo completo sarebbe:

$$\begin{gathered}x^5 + 2x^7 + 2x^9 + x^{10} + 2x^{11} + 2x^{12} + 2x^{13} + 2x^{14} + 3x^{15} + \\ 2x^{16} + 4x^{17} + 2x^{18} + 4x^{19} + 3x^{20} + 4x^{21} + 4x^{22} + 4x^{23} + 4x^{24} + \\ 5x^{25} + 4x^{26} + 6x^{27} + 4x^{28} + 6x^{29} + 5x^{30} + 6x^{31} + 6x^{32} + 6x^{33} + \\ 6x^{34} + 7x^{35} + 6x^{36} + 8x^{37} + 6x^{38} + 8x^{39} + O\left(x^{40}\right)\end{gathered}$$

Da questo sviluppo, in particolare, si vede che, se $k = 8$, non c'è nessuna soluzione, come è facile verificare.

Queste quantità vengono chiamate partizioni *(integre partitions),* e non sono ordinate.

2.3. Impostazione matematica

(Set) Se $k_i \in [0,1]$, è come se dovessimo scegliere tra i sottoinsiemi di dimensione k estraibili dall'insieme $[n] = \{1, 2, ..., n\}$.

Considerando che il primo elemento lo posso scegliere in n modi, il secondo in $n-1$ modi, $n-2$, etc, e considerando anche che l'ordine con cui li prendo non conta, abbiamo:

$$\frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots}^{\text{k volte}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Essi non sono altro che i coefficienti binomiali di Newton $\binom{n}{k}$, e rappresentano le *combinazioni semplici* $C_{n,k}$.

La funzione generatrice di questa classe combinatoriale è:

$$(x^{\{0,1\}})^n = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k$$

(Multiset) Se $k_i \in [0, \infty]$, la funzione generatrice diventa:

$$(x^*)^n = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right) \cdot x^k$$

I simboli $\left(\binom{n}{k}\right)$ si possono calcolare osservando che:

$$(1+x+x^2+x^3+\dots)^n = \frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-n}{k} (-1)^k \cdot x^k$$

per cui :

$$\boxed{\left(\!\binom{n}{k}\!\right)=\binom{-n}{k}(\text{-}1)^k=\frac{\overbrace{n(n+1)(n+2)(n+3)\dots}}{k!}=\binom{n+k-1}{k}}$$

A questo risultato possiamo arrivare anche in maniera puramente combinatoriale: in effetti, si tratta di rimescolare $n-1$ stanghette (identiche) e k palline (identiche), per cui:

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \binom{n+k-1}{k}$$

il che coincide con quanto trovato prima.

Queste quantità sono chiamate *combinazioni con ripetizione* e sono talvolta indicate col simbolo $C'_{n,k}$.

(Compositions) Se $k_i \in [1, \infty]$, avremo

$$(x^+)^n = (x + x^2 + x^3 + \dots)^n = \left(\frac{x}{1-x}\right)^n = \sum_n c_{k,n} x^k$$

Per determinare $c_{k,n}$, mettiamo subito una pallina in ogni scatola, e poi distribuiamo le altre $n-k$ come facciamo con i normali multiset, per cui:

$$c_{k,n} = \left(\!\binom{n}{k-n}\!\right) = \binom{k-1}{k-n} \equiv \binom{k-1}{n-1}$$

Si può dimostrare che, sommando le composizioni di k in tutte le parti possibili n, si ottiene:

$$c_k = \sum_{n=1}^{k} \binom{k-1}{n-1} = 2^{k-1} \text{ [2]}$$

Esempio: per $k = 3$ sono $2^2 = 4$

$$3 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1$$

Per $k = 4$ sono $2^3 = 8$

[2] Questa formula si può dimostrare pensando di mettere uno dei due simboli $\{'''', |\}$ nelle $k-1$ intercapedini trai numeri numero $1|2|3|\dots|k$, cosa che si può appunto fare in 2^{k-1} modi.

$$\begin{aligned}4 &= 1+1+1+1 = \\ &= 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = \\ &= 1+3 = 3+1 = 2+2\end{aligned}$$

(Partitions) Per le partizioni di un interno k in n parti $p_{k,n}$ non si conoscono formule chiuse, ma la funzione generatrice si esprime facilmente come produttoria:

$$\prod_{r=1}^{n} \frac{1}{1-x^{\alpha_r}} = \cdots + p_{k,n} \cdot x^k + \ldots$$

α_r sarebbe il «quanto» di base per l'occupazione della scatola r.

2.4. Equazioni diofantee

In generale, detto k_i il numero di palline nella scatola i-esima, le configurazioni possibili sono le soluzioni dell'equazione:

$$k = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots k_n$$

Le varie classi combinatoriali viste fin'ora non sono altro che casi particolari di questa equazione: i set con $k_i \in [0,1]$; i multiset con $k_i \in [0,\infty]$; le compositions, con $k_i \in [1,\infty]$.

Quanto alle partitions, possiamo scrivere:

$$k = \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 + \ldots \alpha_n k_n$$

Esempio (*equazioni di Frobenius*) le soluzioni (x,y,z) dell'equazione

$$10 = 2x + 3y + 5z$$

le possiamo ottenere estraendo il coefficiente di x^{10} nello sviluppo:

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)} = \ldots + \boxed{4}\,x^{10} + \ldots$$

Esse sono:

$$\begin{pmatrix} x \to 0 & y \to 0 & z \to 2 \\ x \to 1 & y \to 1 & z \to 1 \\ x \to 2 & y \to 2 & z \to 0 \\ x \to 5 & y \to 0 & z \to 0 \end{pmatrix}$$

2.5. Problemi

1. *(weak compositions) In quanti modi possiamo distribuire 10 caramelle a 4 bambini, ammettendo la possibilità che qualche bambino ne abbia zero?*

   Soluzione. $\left(\binom{4}{10}\right) = \binom{13}{10} = 286$

2. *In quanti modi possiamo distribuire 20 caramelle a 5 bambini, almeno 2 caramelle a bambino?*

   Basta dare preliminarmente 2 caramelle a ciascuno bambino, per cui ne restano da distribuire $k = 10$ tra $n = 5$:

   Soluzione. $\left(\binom{5}{10}\right) = \binom{14}{10} = \binom{14}{4} = 1001$

3. *Quante sono le soluzioni intere non-negative della disequazione $a + b + c \leq 1000$?*

   Basta risolvere l'equazione a quattro variabili $a + b + c + d = 1000$. Infatti, se $d \geq 0$, necessariamente $a + b + c$ sarà inferiore a 1000.

   Soluzione. $\left(\binom{4}{1000}\right) = \binom{1003}{1000} = \binom{1003}{3} = 167668501$

4. *In quanti modi si possono sistemare 10 palline in 8 scatole, se ogni scatola deve contente solo un numero pari di palline (compreso zero)?*

   Soluzione brutale: cerca il coefficiente di x^{10} nel seguente sviluppo:

   $$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})^8 = 1 + 8x^2 + 36x^4 + 120x^6 + 330x^8 + 792x^{10} + 1708x^{12} + 3368x^{14} + O\left(x^{16}\right)$$

   Soluzione. 792

5. *In quanti modi possiamo pagare un conto di 200 euro, usando soltanto monete da 1,2,5,10,20,50,100 euro?* [3]

   Possiamo ottenere il risultato (73681) estraendo il coefficiente di x^{200} nell'(orrendo) sviluppo di potenze:

   $$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})(1-x^{50})(1-x^{100})} = \ldots + \boxed{73681}\,x^{200} + \ldots$$

[3] *(abbiamo già fatto un problema simile ...)*

Capitolo 3

Il lancio di dadi

Con i dadi si entra in un ambito estremamente classico del calcolo combinatorio.. Cionondimeno, anche questo tipo di problemi può essere affrontato in molti casi con *metodi algebrici.*

La questione è semplice:

Problema. *Con quale probabilità si ottiene una certa somma k lanciando n dadi con f facce?*

3.1. Generatrici e probabilità

Se i dadi sono non truccati, la soluzione è facile: il problema è equivalente a mettere k palline in n scatole,

$$k = k_1 + k_2 + k_3 + \dots k_n$$

con la condizione $k_i \in [1, f]$, dove f è il numero delle facce del dado, per cui:

$$(x^{\{1,2,\ldots f\}})^n = (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^f)^n = \cdots + c_k x^k + \ldots$$

Le probabilità cercate sono $p(k) = \frac{c_k}{f^n}$ e le possiamo ottenere da

$$\frac{(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^f)^n}{f^n} = (\frac{1}{f}x + \frac{1}{f}x^2 + \frac{1}{f}x^3 + \cdots + \frac{1}{f}x^f)^n =$$
$$= \cdots + \boxed{p(k)}x^k + \ldots$$

Esempio. *Calcolare la probabilità di ottenere somma k=9 lanciando n=3 dadi a 6 facce, non truccati.*

Sviluppando la funzione generatrice:

$$\tfrac{1}{216}\left(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x\right)^3$$

in potenze di x:

$$\tfrac{x^3}{216} + \tfrac{x^4}{72} + \tfrac{x^5}{36} + \tfrac{5x^6}{108} + \tfrac{5x^7}{72} + \tfrac{7x^8}{72} + \tfrac{25x^9}{216} + \tfrac{x^{10}}{8} + \tfrac{x^{11}}{8} + \tfrac{25x^{12}}{216} + \tfrac{7x^{13}}{72} + \tfrac{5x^{14}}{72} + \tfrac{5x^{15}}{108} + \tfrac{x^{16}}{36} + \tfrac{x^{17}}{72} + O\left(x^{18}\right)$$

si trovano tutte le probabilità per ciascun n e, in particolare,

$$\text{p(9)}=\tfrac{25}{216}$$

3.2. E se i dadi sono truccati?

Se il dado è truccato, cioè se le facce i si presentano con probabilità diverse p_i, con $\sum_i p_i = 1$, la generatrice si ottiene sostituendo $\frac{1}{f} \to p_i$ nella generatrice standard:

$$(\sum_i p_i x^i)^n = \sum_k p(k) x^k$$

L'esempio che segue, in cui si usano dadi con diverse facce, sia dadi truccati, mostra in pieno la potenza del metodo.

Esempio. *Calcolare la probabilità di ottenere somma k=6 lanciando un dato a 4 facce (tetraedro), e due dadi a 6 facce (esaedro). Il dado a 4 facce è stato modificato in modo che l'1 abbia probabilità doppia di uscire rispetto agli altri.*

La funzione generatrice è ora:

$$\left(\frac{x^4}{5}+\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{5}+\frac{2x}{5}\right)\left(\frac{x^6}{6}+\frac{x^5}{6}+\frac{x^4}{6}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{6}+\frac{x}{6}\right)^2$$

da cui si ottiene lo sviluppo:

$$\frac{x^3}{90}+\frac{x^4}{36}+\frac{x^5}{20}+\frac{7x^6}{90}+\langle\langle 7\rangle\rangle+\frac{x^{14}}{30}+\frac{x^{15}}{60}+\frac{x^{16}}{180}+O\left(x^{18}\right)$$

e quindi:

$$\text{p(6)}=\frac{7}{90}=0.078$$

3.3. Una formula chiusa per $p(k)$

Vogliamo trovare il numero di soluzioni $c_f(k)$ dell'equazione,

$$k=k_1+k_2+\cdots+k_n$$

con la condizione $k_i \in [1,f]$.

Il problema è equivalente a sistemare k palline in n scatole non vuote, ma ora le scatole non posso contenere più di f palline.

Se non ci fosse il limite $k_i \leq f$, la soluzione sarebbe:

$$c(k)=\binom{k-1}{n-1}$$

Un possibile approccio (*metodo del setaccio*[1]) è partire da $c(k)$ e cancellare progressivamente i casi con scatole in «sovrappeso». Per avere almeno r scatole in «sovrappeso», che indicheremo con $N(\geq r)$, basta riempirne r (cosa che si può fare in $\binom{n}{r}$ modi) e distribuire le rimanenti $(k - r \cdot f)$ palline in $c(k - r \cdot f)$ modi, per cui

$$N(\geq r) = \binom{n}{r} \cdot c(k - r \cdot f)$$

La nostra $c_f(k)$ non è altro che $N(= 0)$, per cui sottraiamo subito $N(\geq 1)$ da $c(k)$, ottenendo $c(k) - \binom{n}{1} \cdot c(k - f)$. Così facendo, però, i casi con due scatole in «esubero» verrebbero contati due volte. Dobbiamo quindi riaggiungerli, ottenendo: $c(k) - \binom{n}{1} \cdot c(k - f) + \binom{n}{2} \cdot c(k - 2f)$

Continuando questo processo fin quando le palline da sistemare sono maggiori del numero di scatole $(k - r \cdot f) \geq n$, avremo:

$$\begin{aligned} c_f(k) = c(k) - \binom{n}{1} c(k - f) + \binom{n}{2} \cdot c(k - 2f) + \dots \\ - \binom{n}{3} \cdot c(k - 3f) + \dots \end{aligned}$$

In forma chiusa si ha:

[1] Detto anche PIE: *principio di Inclusione-Esclusione.* Questo metodo si basa sulla proprietà:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

dove $|A|$ indica «numero di elementi di A». Per n insiemi, si ha:

$$|\cup_i A_i| = \sum_i |A_i| - \sum_{ij} |A_i \cap A_j| + \sum_{ijk} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots$$

$$\boxed{\text{p(k)=}\frac{1}{f^n}\sum_{r=0}^{\left[\frac{k-n}{f}\right]}\text{(-1)}^r\binom{n}{r}\binom{k-rf-1}{n-1}}$$

Per $k = 9$, $n = 3$ ed $f = 6$ (esempio precedente) torna $\frac{25}{216}$ come già trovato con la funzione generatrice.

Capitolo 4

Generatrici esponenziali

4.1. Standard o Esponenziale?

Consideriamo le sequenze di palline bianche ($\circ$) e nere ($\bullet$) e concentriamoci sulle *strutture* che è possibile formare mettendone di seguito 2, 3, etc.

Se l'ordine della palline non conta, allora le possiamo ordinare, mettendo per prima le nere, ottenendo:

$$
\begin{aligned}
&\{\} \\
&\bullet, \circ \\
&\bullet\bullet, \bullet\circ, \circ\circ \\
&\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\circ, \circ\circ\circ \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Possiamo contarle ricavando il coefficiente della potenza x^n nel seguente sviluppo:

$$
\begin{aligned}
(x^*)(x^*) &= (1 + x + x^2 + x^2 + \dots)^2 = \\
&= \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = 1 + 2x + 3x^3 + 4x^4 + \dots
\end{aligned}
$$

I coefficienti di questa serie non sono altro che i multiset $\left(\!\binom{2}{n}\!\right)$, al variare di n. Con 3 colori invece che 2, dovremmo prendere $(1-x)^{-3}$, etc.

E se invece contasse l'ordine? Prendiamo il caso di $n = 3$ palline: ora dovremmo conteggiare come diverse anche le altre 4 disposizioni che si differenziavano solo per l'ordine:

$$\{\bullet\circ\bullet, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\bullet, \bullet\circ\bullet, \circ\circ\bullet\}$$

per un totale di $4+4=8$.

Più in generale, se considerando stringhe di palline lunghe n, le possibilità sono 2^n, perché ogni pallina può essere scelta in due modi.

Come ottenere algebricamente questo risultato mediante le funzioni generatrice? Risposta: usare una EGF, e cioè pensare in termini di «peso relativo».

Di per sé, le sequenze di lunghezza n di sole palline bianche o di sole palline nere, hanno peso relativo $\frac{1}{n!}$, dato che l'ordine non conta:

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n = e^x \quad e \quad B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$$

Moltiplicando le due funzioni abbiamo:

$$\sum_k \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{k} \underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{n-k}$$

e, algebricamente,

$$A(x)B(x) = e^{2x} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\boxed{2^n}}{n!} x^n$$

il che conferma quando trovato con metodo combinatoriali.

Concludendo: per due soli colori:

$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x}$	mucchietti di palline di 2 colori
$e^x \cdot e^x = e^{2x}$	sequenze di caratteri con 2 lettere

4.2. Strutture esponenziali

Supponiamo di avere una collezione di oggetti strutturati di varie dimensioni r,

$$A = \{a_r, r \in [0, \dots, \infty]\}$$

Dal punto di vista delle funzioni generatrici, questo insieme verrebbe rappresentato dalla funzione:

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{r!} x^r$$

Proponiamoci ora questo obbiettivo: *in quanti modi possiamo formare una struttura contenente k di questi oggetti A, in maniera che il peso totale (cioè le parti elementari di cui sono fatti) sia n?*

Seguendo la solita regola del dover moltiplicare le generatrici, si ha

$$\underbrace{AA \dots A}_{k} = A^k$$

Più in generale, indicando con y l'oggetto complesso A e con x gli oggetti semplici, possiamo rappresentare l'intera classe combinatoriale con una funzione bivariata (*generatrice esponenziale*):

$$Z = \sum_k \frac{A^k}{k!} \cdot y^k = e^{y \cdot A(x)}$$

Nel caso di più tipi di oggetti $A, B, C, \dots$, possiamo scrivere[1] :

---

[1] $\binom{n}{n_1, n_2, n_3, \dots}$ rappresentano i *simboli multinomiali:*

$$e^{A+B+C+\dots} = \sum_{n_1,n_2,\dots} \binom{n}{n_1,n_2,n_3,\dots} \frac{A^{n_1}B^{n_2}C^{n_3}\dots}{n!}$$

dove A,B,C, etc possono essere esse stesse funzioni generatrici.

Esempio. *In quanti modi possiamo sistemare n persone su a biciclette (da due persone) e b tandem (da tre persone)? NB: bici e tandem sono considerate diverse tra loro*

Per fissare le idee, prendiamo $n = 8$. Le configurazioni possibili sono del tipo a^4 (*4 bici*) e del tipo ab^2 (*una bici e due tandem*). Ma come conteggiarle?

Indichiamo le persone con la lettera x, e le configurazioni cercate con c_8. Se l'ordine delle persone non conta, abbiamo:

$$\frac{c_8}{8!}x^8 = \frac{1}{4!0!}(\frac{ax^2}{2!})^4 + \frac{1}{1!2!}(\frac{ax^2}{2!})(\frac{bx^3}{3!})^2$$

Questo corrisponde a porre $A = \frac{ax^2}{2!}$ e $B = \frac{bx^3}{3!}$ e a sviluppare in potenze la funzione:[2]

$$e^{\frac{ax^2}{2!}+\frac{bx^3}{3!}} = \dots + \frac{\left(\boxed{105a^4 + 280ab^2}\right)}{8!}x^8 + \dots$$

$$\binom{n}{n_1,n_2,n_3,\dots} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\dots}$$

con $\sum_i n_i = n$.

[2] Lo sviluppo completo fino a x^{10} è: $e^{\frac{ax^2}{2!}+\frac{bx^3}{3!}} = 1 + \frac{ax^2}{2} + \frac{bx^3}{6} + \frac{a^2x^4}{8} + \frac{1}{12}abx^5 + \frac{1}{6}x^6\left(\frac{a^3}{8}+\frac{b^2}{12}\right) + \frac{1}{48}a^2bx^7 + \frac{1}{8}x^8\left(\frac{1}{6}a\left(\frac{a^3}{8}+\frac{b^2}{12}\right)+\frac{ab^2}{24}\right) + \frac{1}{9}x^9\left(\frac{1}{12}b\left(\frac{a^3}{8}+\frac{b^2}{12}\right)+\frac{a^3b}{48}\right) + O\left(x^{10}\right)$

4.3. Problemi

Nota preliminare: le generatrici delle sequenze pari e quella delle sequenze dispari si possono ottenere col coseno e il seno iperbolico. Infatti:

$$\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

1. *Qual è la probabilità, che lanciando un dado n volte, l'1 esca un numero pari di volte?*

   Indicando le facce del dado con le lettere a-g e la faccia «1» con la lettera «a», la funzione generatrice è:

   $$(\frac{e^a + e^{-a}}{2})e^b e^c e^d e^f e^g = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \cdot e^{5x} = \sum_n \frac{c_n}{n!} x^n$$

   Dopo qualche semplice passaggio:

   $$\frac{e^{6x} + e^{4x}}{2} = \sum_n \boxed{\frac{6^n + 4^n}{2}} \frac{x^n}{n!}$$

   e quindi:

   $$p_n = \frac{c_n}{6^n} = \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{2}$$

   (Notare che $p_n \to 0.5$ se $n \to \infty$).

2. *Quante parole di n lettere possiamo formare con le lettere $\{a, b, c\}$, se a e b devono comparire un numero dispari di volte?*

$$(\frac{e^a - e^{-a}}{2})(\frac{e^b - e^{-b}}{2})e^c = \sum_n \boxed{\frac{3^n - 2 + (-1)^n}{4}} \frac{x^n}{n!}$$

3. *Quante sequenze di n lettere {a,b,c,d,e} possiamo formare se a e b devono comparire complessivamente un numero pari di volte?*

$$(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2})e^{3x} = \sum_n \boxed{\frac{5^n + 1}{2}} \frac{x^n}{n!}$$

Per arrivare a questo risultato, consideriamo separatamente le lettere $\{a, b\}$. Dovendo comparire un numero pari di volte, saranno pari-pari o dispari-dispari:

$$\cosh(x)\cosh(x) + \sinh(x)\sinh(x)$$

che è equivalente a

$$\cosh(2x) = 1 + \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{4^2}{4!}x^4 + \dots$$

Potevamo arrivare direttamente al $\cosh(2x)$, partendo da:

$$1 + \frac{1}{2!}(a+b)^2 + \frac{1}{4!}(a+b)^4 + \dots$$

(la quale significa proprio: *«a o b» 2 volte, oppure 4 volte, oppure 6 volte, etc)* e sostituire infine:

$$a + b \to x + x \to 2x$$

4. *Sequenze di n lettere dell'alfabeto $\{a, b, c, d\}$, con almeno 2 lettere "a"*

$$(e^x - (1+x))\, e^{3x} = \sum_n \boxed{c_n} \frac{x^n}{n!}$$

5. *In quanti modi si possono sistemare n persone in 3 stanze, almeno una persona a stanza?*

$$(e^x - 1)^3 = \sum_n \boxed{3^n - 3 \cdot 2^n + 3} \frac{x^n}{n!}$$

6. *Si lancia un dado con 6 facce n volte: qual è la probabilità che, contemporaneamente, l'1 esca un numero pari di volte, 2 un numero dispari di volte e che il 3 esca almeno due volte?*

$$(\frac{e^a + e^{-a}}{2})(\frac{e^b - e^{-b}}{2})\,(e^c - 1 - c)\, e^d e^f e^g \to \sum_n \boxed{c_n} \frac{x^n}{n!}$$

Esempio con $n = 10$ volte:

$cosh(x) \cdot sinh(x) \cdot (e^x - 1 - x)e^{3x} = \ldots + \frac{8188927}{3628800}\mathrm{x}^{10} + \ldots$

ottenendo:

$$p_{10} = \frac{c_{10}}{6^{10}} = \frac{8188927}{60466176} \approx = 0.13543^{(3)}$$

4.3.1. Risoluzioni alternative

Naturalmente, tutti i problemi proposti si possono risolvere anche col *conteggio diretto*.

(3) Lo sviluppo completo fino a x^{20} è $\frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{3} + \frac{79x^4}{24} + \frac{24x^5}{5} + \frac{4039x^6}{720} + \frac{13843x^7}{2520} + \frac{186799x^8}{40320} + \frac{44431x^9}{12960} + \frac{8188927x^{10}}{3628800} + \frac{8886847x^{11}}{6652800} + \frac{49105297x^{12}}{68428800} + \frac{54896141x^{13}}{155675520} + \frac{397524893x^{14}}{2490808320} + \frac{43761250199x^{15}}{653837184000} + \frac{547071377119x^{16}}{20922789888000} + \frac{283382580241x^{17}}{29640619008000} + \frac{429307982527x^{18}}{130660687872000} + \frac{64792464434017x^{19}}{6082255020441600 0} + O\left(x^{20}\right)$

Riconsideriamo, ad esempio, il problema N 1: abbiamo n lanci di un dado. Le configurazioni in cui l'1 è uscito un numero pari di volte r sono

$$c_n = \sum_{r \in pari} \binom{n}{r} 5^{n-r}$$

Esse si possono ottenere, in maniera indipendente, scegliendo r posizioni in cui mettere l'1 (cosa che si può fare in $\binom{n}{r}$ modi) e ponendo le altre 5 facce nelle rimanenti 5^{n-r} posizioni, per poi sommare tutto.

Per effettuare la sommatoria sui soli r pari, si può usare questa identità:

$$\frac{(1+a)^n \pm (1-a)^n}{2} = \sum_r \binom{n}{r} \frac{1 \pm (-1)^r}{2} a^r = \sum_{r \in pari/dispari} \binom{n}{r} a^r$$

per cui:

$$c_n = \sum_{r \in pari} \binom{n}{r} 5^{n-r} = 5^n \cdot \sum_{r \in pari} \binom{n}{r} (\frac{1}{5})^5 =$$
$$= 5^n \cdot \frac{(1+\frac{1}{5})^n + (1-\frac{1}{5})^n}{2} = \frac{6^n + 4^n}{2}$$

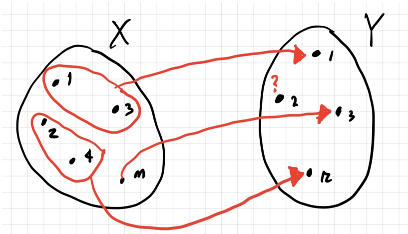
riottenendo:

$$p_n = \frac{c_n}{6^n} = \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{2}$$

Capitolo 5

Funzioni, insiemi e sottoinsiemi

Questo è un tipico campo di applicazione per le generatrici esponenziali, perché gli oggetti (essendo elementi di un insieme) sono per definizione *distinguibili*.



5.1. Palline numerate

Ritorniamo al problema nelle n palline in k scatole $\{1, 2, \ldots, k\}$. Ora però le palline, a differenza dei casi precedenti, le consideriamo numerate $\{1, 2, \ldots n\}$.

Problema. *In quanti modi $S(n, k)$ possiamo sistemare n palline numerate in k scatole numerate?*

Se potessimo sistemare ogni pallina liberamente nelle k scatole, la risposta sarebbe k^n, ma c'è un problema: dobbiamo eliminare tutti i casi con qualche scatola vuota!

Questa sottrazione si può fare agevolmente col *principio di Inclusione-Esclusione* (PIE) già usato altrove (vedi *Appendici*).

Si trova che:

$$S(n,k) = k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \binom{k}{3}(k-3)^n + \dots$$

Dimostrazione. Eliminiamo dalle k^n possibilità quelle che prevedono almeno 1 scatola vuota: dato che possiamo scegliere questa scatola in $\binom{k}{1}$ modi, e dato che dobbiamo distribuire tutte le n palline nelle rimanenti $(r-1)$ caselle, in totale $\binom{k}{1}(k-1)^n$. Le configurazioni con due scatole vuote però verrebbero sottratte due volte, per cui dobbiamo riaggiungerle: $\binom{k}{2}(k-2)^n$, e così via ... $\square$

5.2. Numeri di Stirling del Secondo tipo

Al problema delle n palline numerate in k scatole è associabile strettamente un altro problema:

Problema. *In quanti modi un insieme di n elementi è partizionabile in k sottoinsiemi non vuoti?*

E' chiaro che l'unica differenza col caso delle palline è che, ora, l'ordine delle scatole non è importante: dobbiamo eliminare le $k!$ permutazioni dal computo delle possibilità.

Il numero risultato è chiamato *numero di Stirling di II specie* (set partitions) ed è indicato col simbolo $\left\{ {n \atop k} \right\}$[1] :

[1] *Wolfram's Mathematica* ha la funzione StirlingS2[n,k].

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{S(n,k)}{k!} = \frac{k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n + \dots}{k!}$$

Alcuni numeri di Stirling:

$$\left\{ {n \atop 0} \right\} = 1 \qquad \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1 \qquad \left\{ {n \atop n} \right\} = 1$$

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1 \qquad \left\{ {n \atop 3} \right\} = \frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{3!}$$

Dimostrazione. Il caso $\left\{ {n \atop 2} \right\}$ si può dimostrare direttamente. Le partizioni in 2 parti dell'insieme sono $\frac{1|(n-1)+2|(n-2)+\dots}{2}$, per cui:

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = \frac{\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots \binom{n}{n-1}}{2} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

Spiegazione: La divisione per 2 è per non contare come distinti i due casi $1|(n-1)$ e $(n-1)|1$, e gli altri simili. Notare che si è fatto uso della proprietà: [2]

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n} = \#\text{ sottoinsiemi di [n]}$$

e che si sono sottratte le due configurazioni $0|(n)$ e $(n)|0$ □

5.3. Funzioni iniettive

Consideriamo le funzioni $f : X \rightarrow Y$, con $X = [n] = \{1, 2, \dots n\}$ e $Y = [k] = \{1, 2, \dots k\}$.

(2) Facilmente deducibile dalla definizione stessa dei coefficienti binomiali:

$$\boxed{(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k}$$

ponendovi $x = 2$

Esse non sono altro che tabelle a due entrate:

x	1	2	3	4	5	...
y	3	3	7	1	1	...

in cui ciascun numero $x \in \{1, 2, \ldots n\}$ viene associato ad un singolo numero $y \in \{1, 2, \ldots k\}$.

Poiché ad primo x possiamo associare k valori, al secondo ancora k, etc, il numero possibile di tabelle è

$$\# \text{ tutte} = k^n$$

Ovviamente, potrà capitare che qualche numero Y non venga «associato» da nessun x; così come potrà capitare che più numeri X vengano associati allo stesso numero Y.

Una funzione è detta *iniettiva* se $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$. Immaginiamo quindi di volere costruire *tutte* le funzioni iniettive tra i due insiemi $[n]$ ed $[k]$: all'input 1 possiamo associare k valori di output, ma a 2 soltanto $k-1$ valori, a 3 soltanto $k-2$, etc, per cui:

$$\# \text{ iniettive} = k_{(n)}$$

dove si è introdotta la notazione [3] :

$$k_{(n)} = \underbrace{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots}_{\text{n volte}} = n! \cdot \binom{k}{n}$$

5.4. Funzioni surgettive

Per funzione *surgettiva (o suriettiva)* si intende una funzione per la quale non succede mai che alcuni dei numeri Y rimangano non connessi a nessun valore X.

[3] detti *fattoriali decrescenti*

Calcolare quante sono le funzioni surgettive tra due insiemi è un po' più complicato, ma si può fare agevolmente col *principio di Inclusione-Esclusione* (PIE). Si trova che:

$$\#\,\text{surgettive} = k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \binom{k}{3}(k-3)^n + \dots$$

Dimostrazione. Il risultato coincide con $S(n,k) = k!\left\{ {n \atop k} \right\}$: le partizioni di $[n]$ in k parti non vuote, ma con l'ordine delle parti ristabilito. Il motivo è presto spiegato: dato che, normalmente, queste funzioni non sono iniettive, vuol dire che ad ognuno degli k valori di Y è associato non un valore, ma un sottoinsieme di X. Questi sottoinsiemi formano una *partizione* dell'insieme X in k parti:

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_r$$

Dunque, contare le funzioni surgettive o contare le partizioni non vuote finisce per essere la stessa cosa. □

5.5. Partizioni di un insieme e funzioni iniettive

Torniamo ancora al conteggio delle funzioni tra due insiemi X e Y, r^n, e supponiamo che $r < n$.

Dato che in Y ci saranno sicuramente elementi «penzolanti» di Y, la *partizione* dell'insieme X conterrà soltanto k parti non vuote:

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k$$

con $k \leq r$.

Ad ognuna di queste partizioni (il cui numero totale è $\left\{ {n \atop k} \right\}$) sono associabili k valori distinti di Y, cioè una delle $r^{(k)} = r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdots$ funzioni iniettive disponibili.

Ne deriva quindi la notevole relazione

$$x^n = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} \cdot x_{(n)}$$

Questa formula permette di decomporre le potenze x^n in fattoriali decrescenti $x_{(n)}$:

$$x^n = \left\{ {n \atop 1} \right\} x + \left\{ {n \atop 2} \right\} x(x-1) + \left\{ {n \atop 2} \right\} x(x-2)(x-3) + \dots$$

Esempio:

$$\begin{aligned}
x &= \boxed{1} x \\
x^2 &= \boxed{1} x + \boxed{1} x(x-1) \\
x^3 &= x + \boxed{3} x(x-1) + \boxed{1} x(x-1)(x-2) \\
etc\dots
\end{aligned}$$

La formula di decomposizione si può anche scrivere con $S(n,k)$:

$$\begin{aligned}
x^n &= \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} \cdot x^{(k)} = \sum_k k! \left\{ {n \atop k} \right\} \cdot \frac{x_{(n)}}{k!} = \\
&= \sum_k S(n,k) \cdot \binom{x}{k}
\end{aligned}$$

5.6. Generatrice dei numeri di Stirling II

5.6.1. Generatrice esponenziale

Per dedurre la funzione generatrice dei numeri $\left\{ {n \atop k} \right\}$, torniamo al problema delle n palline in k scatole e ragioniamo in termini di *generatrici esponenziali.*

Consideriamo le k scatole. In ognuna di esse possiamo mettere una pallina x, o due palline $x^2/2!$, o tre palline $x^2/3!$, etc, per cui dobbiamo dapprima sommare e poi fare i k prodotti, per ognuna delle scatole:

$$(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots)^k = (e^x - 1)^k = \sum_n \frac{x^n}{n!} S(n,k)$$

Se invece vogliamo i numeri di Stirling, dobbiamo dividere per $k!$. In questo caso, è meglio scrivere una funzione generatrice in due variabili: x^n per contare le palline e y^k per contare le scatole:

$$\frac{(e^x - 1)^k}{k!} = \sum_n \frac{x^n}{n!} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

Esempio. I numeri $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix} \right\}$ si possono ottenere sviluppando in serie

$$\tfrac{(e^x-1)^3}{3!} = \dots 966\tfrac{x^8}{8!} + 301\tfrac{x^7}{7!} + 90\tfrac{x^6}{6!} + 25\tfrac{x^5}{5!} + 6\tfrac{x^4}{4!} + \tfrac{x^3}{3!}$$

Moltiplicando pre y^ke sommando, si ottiene la generatrice bivariata dei numeri di Stirling di II specie:

$$Z = e^{y \cdot (e^x - 1)} = \sum_{n,k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \cdot y^k \frac{x^n}{n!}$$

5.6.2. Generatrice standard

E′ possibile generare i numeri di Stirling anche con una generatrice standard, ma la dimostrazione è un po′ più involuta.

Supponiamo di dover mettere le n palline nelle k scatole non vuote, che indicheremo con le lettere alfabetiche $\{a, b, c, \dots\}$.

Supponiamo di veder scorrere davanti a noi le n palline: alle prime palline associamo un certo numero di lettere a:

$$(a)^+ = a + a^2 + a^3 + \dots = \frac{a}{1-a}$$

Quando ci siamo stancati con la lettera a, assegniamo la nostra prima lettera b, dopodiché assegniamo una lettera già uscita, tra a o b:

$$b(a|b)^* = \frac{b}{1-(a+b)}$$

Di nuovo, dopo un po' cominciamo ad assegnare la scatola c, ma anche le altre già utilizzate:

$$c(a|b|c)^* = \frac{c}{1-(a+b+c)}$$

e via di seguito, per k volte.

Ora moltiplichiamo le k funzioni ottenute e sostituiamo ogni lettera $\{a, b, c, \ldots\}$ con y (a rappresentare la scatola generica), in modo che y^n rappresenti n palline.

Si dimostra che:

$$\underbrace{\frac{y^k}{(1-y)(1-2y)(1-3y)\ldots}}_{\text{k volte}} = \sum_{n\geq k} \left\{ {n \atop k} \right\} y^n$$

Esempio. con tre scatole ($k = 3$) si ha:

$$\frac{y^3}{(1-3y)(1-2y)(1-y)} =$$
$$= y^3 + 6y^4 + 25y^5 + 90y^6 + 301y^7 + 966y^8 + 3025y^9 + O\left(y^{10}\right)$$

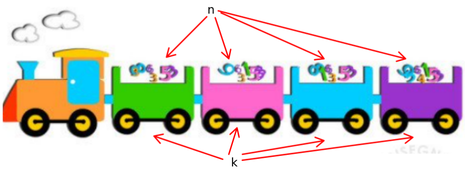
Possiamo estrarre i valori di $\left\{ {n \atop 3} \right\}$ direttamente dallo sviluppo ottenuto, e questa volta senza dover moltiplicare per $n!$.

Es: ecco i primi valori di $\left\{ {n \atop 3} \right\}$ per $n \geq 0$ (4) :

$$\{0, 0, 0, 1, 6, 25, 90, 301, 966, 3025\}$$

(4) Per definizione $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ se $n < k$

5.7. Problemi



1. *In quanti modi si possono sistemare n passeggeri in 4 carrozze non vuote?*

   Soluzione.
   $$4!\left\{ {n \atop 4} \right\} = 4^n - \binom{4}{1}(3)^n + \binom{4}{2}(2)^n - \binom{4}{3} = \\ = 4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4$$

2. *In quanti modi n persone si possono suddividere in 3 gruppi?*

   Soluzione.
   $$\left\{ {n \atop 3} \right\} = \frac{3^n - \binom{3}{1}2^n + \binom{3}{2}}{3!} = \frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{3!}$$

3. *Abbiamo n=4 viaggiatori e r=3 destinazioni. In quanti modi possiamo assegnare le destinazioni ai viaggiatori?*

   Soluzione. I modi possibili sono r^n =81; i modi in cui nessuna destinazione resti senza viaggiatori è $r! \cdot \left\{ {n \atop r} \right\}$ =36.

4. *Abbiamo n=4 viaggiatori e r=6 destinazioni. In quanti modi possiamo assegnare le destinazioni ai viaggiatori, in modo che nessuno viaggiatore abbia la stessa destinazione di un altro ?*

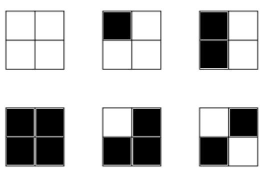
   Soluzione. $r_{(n)} = n! \cdot \binom{r}{n}$ =360.

Capitolo 6

Colorazioni e teorema di Polya

6.1. Il problema

Consideriamo una scacchiera 2×2 con i colori bianco e nero.



Il numero totale di possibili colorazioni è chiaramente $2^4 = 16$. Una scacchiera, però, è un oggetto fisico e può essere ruotata in vari modi nel piano, pur rimanendo la stessa scacchiera.

Quante sono le colorazioni *realmente* diverse?

Da un rapido conteggio, ci accorgiamo che tutte le configurazioni si possono ottenere a partire da soltanto 6 «modelli» di colorazioni (vedi figura), ruotandole in vario modo.

Più in generale, il nostro problema è: *Come contare oggetti a meno di opportune relazioni di equivalenza?*

In particolare, tratteremo due problemi modello: le *collanine* e i *braccialetti*. In entrambi i casi, il problema è quello di contare le disposizioni non-equivalenti di n perline con m colori, ma con una importante differenza: nelle collanine il ribaltamento produce nuove configurazioni $ABCD \neq DCBA$, mentre nei braccialetti no.

L'argomento delle *colorazioni non-equivalenti* è complesso, e qui non si vuole certo trattare la cosa in maniera completa e rigorosa. Per fortuna, anche in questo caso, c'è la possibilità di usare un metodo algebrico.

6.2. Gruppi di simmetria

Che le trasformazioni di simmetria «formano un gruppo G» significa che le varie trasformazioni si possono applicare a catena, e che sono «invertibili». Questo vuol dire che dev'essere presente anche la «trasformazione identica» *id*.

Gruppo C_n I gruppi più semplici sono i *gruppo ciclici:* essi si possono ottenere applicando ripetutamente una sola trasformazione, fino a ritrovare l'oggetto iniziale:

$$G = \{g^k : k \in [0, n-1]\},$$

dove $n = |G|$ è la dimensione di G [(1)].

Gruppo S_n Il *gruppo simmetrico* S_n delle $n!$ permutazioni di n oggetti $[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, tra le quali spiccano *le permutazioni cicliche*.

Esempio: la permutazione ciclica (123) effettua scambi secondo lo schema circolare:

$$(123) \equiv 1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 1$$

[(1)] I gruppi ciclici sono *abeliani*, cioè le trasformazioni commutano. Un esempio è il gruppo ciclico $Z_p = \{1, 2, \ldots p-1\}$, con p=primo, cioè l'aritmetica *modulo-p* .

Lo *shift* ciclico dei tre numeri non cambia la permutazione, per cui le seguenti sono considerate una sola permutazione:

$$(123) \equiv (312) \equiv (231)$$

Ogni permutazione si può decomporre in permutazioni cicliche. Esempio: la permutazione di $n = 4$ oggetti (3412) si decompone in due cicli di lunghezza 2: (13) e (24):

$$(3412) \equiv (13)(24)$$

Per quanto riguarda la trasformazioni «identica», possiamo scriverla come è $(1)(2)(3)\cdots(n)$, oppure anche solo con $()$.

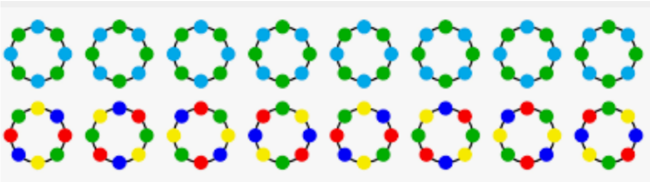
Gruppo D_n Il secondo gruppo interessante è il *gruppo diedrale* D_n, il gruppo di simmetria per un poligono regolare di n vertici. Esso è composto da $2n$ elementi: n rotazioni di angolo $\frac{2\pi}{n} \cdot k$, con $k = 0, 1, \ldots n-1$, intorno al centro del poligono, e n riflessioni rispetto agli n assi di simmetria del poligono.

La teoria che vedremo tra poco prevede che, individuato il gruppo di simmetria G del nostro sistema, occorre rappresentare ogni trasformazione di simmetria come una permutazione in S_n e saperla scomporre nei suoi sottocicli.

Ecco perché il problema è *difficile*!

6.3. Collanine

Supponiamo di voler colorare una collanina di n perline usando perline di m colori. La collanina può essere ruotata di tutti i multipli di $\frac{360^\circ}{n}$, rimanendo invariata, per cui il suo gruppo di simmetria è il gruppo ciclico C_n.



Prendiamo una collanina con $n = 4$ perline. Essa può essere sottoposta a 4 rotazioni R_θ, di angolo $\theta = \{0, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\}$, le quali formano il gruppo di simmetria della figura G:

$$G = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}\}$$

Viste come permutazioni, le trasformazioni di G sono parte del gruppo S_4, per cui possiamo scriverle decomposte in permutazioni cicliche:

$$(\{\}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix})$$

Formiamo ora la seguente tabella:

rotazione	*decomposizione*	*modello*	*codifica*
R_0	(1)(2)(3)(4)	$(\star)(\star)(\star)(\star)$	m^4
R_{90}	(1432)	$(\star\star\star\star)$	m
R_{180}	(1432)=(13)(24)	$(\star\star)(\star\star)$	m^2
R_{270}	$R_{90}^{-1} = (1234)^{-1}$	$(\star\star\star\star)$	m

Nella 4^acolonna, ad ogni *pattern* di colorazione è associato un polinomio nella variabile m:

1. al pattern $(\star)(\star)(\star)(\star)$ è associato m^4, perché si tratta 4 colorazioni indipendenti.

2. al pattern $(\star\star\star\star)$ è associato m, perché le 4 perline monocromatiche si trasformano tra loro, e devono quindi avere lo stesso colore.

3. al pattern $(\star\star)(\star\star)$ è associato m^2, perché si tratta di due gruppi monocromatici di perline che si trasformano solo tra loro, e ogni gruppo ha m possibilità.

Sommando i vari contributi e dividendo per $|G| = 4$, si ottiene un polinomio

$$c(m) = \frac{1}{4}\left(m^4 + m^2 + 2m\right)$$

che è una forma semplificata di quello che viene chiamato il *cycle index* del gruppo di colorazioni.

Il caso della scacchiera 2×2 corrisponde al caso con $m = 2$ colori, per cui $c(2) = 6$ come già visto.

Nel seguito, alcuni dei polinomi $c_n(m)$ al variare di n:

$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3}\left(m^3 + 2m\right) \\ 4 & \frac{1}{4}\left(m^4 + m^2 + 2m\right) \\ 5 & \frac{1}{5}\left(m^5 + 4m\right) \\ 6 & \frac{1}{6}\left(m^6 + m^3 + 2m^2 + 2m\right) \\ 7 & \frac{1}{7}\left(m^7 + 6m\right) \\ 8 & \frac{1}{8}\left(m^8 + m^4 + 2m^2 + 4m\right) \\ 9 & \frac{1}{9}\left(m^9 + 2m^3 + 6m\right) \\ 10 & \frac{1}{10}\left(m^{10} + m^5 + 4m^2 + 4m\right) \end{pmatrix}$$

Se osserviamo attentamente le potenze di m nei vari polinomi, scopriamo che esse sono tutte divisori di n. Si può dimostrare infatti che

$$\boxed{c(m) = \frac{1}{n}\sum_{r|n} \phi(r) \cdot m^{\frac{n}{r}}}$$

dove il simbolo $r|n$ significa che dobbiamo sommare su tutti i divisori r di n, mentre $\phi(n)$ è la cosiddetta *funzione ϕ di*

Eulero (totient function): essa ci dice quanti sono gli interi in $\{1, 2, \ldots, n\}$ che sono *relativamente primi* con n.(2)

Esempio. $\phi(8) = 4$ perché i numeri coprimi con 8 sono quattro: $1, 3, 5, 7$.

Alcuni altri valori di $\phi(n)$:

$$\begin{pmatrix} n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \phi(n) & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 6 & 4 & 6 & 4 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. Il gruppo G, essendo ciclico, si ottiene prendendo le potenze π^k con $k = 0, \ldots n-1$ di una permutazione qualsiasi del gruppo, π. Ma la trasformazione π^k è decomponibile in $\frac{n}{r}$ cicli di lunghezza r, con $r = \frac{n}{MCD(n,k)}$, e questo lo si fa in $\varphi(r)$ modi. E questo spiega perché compaia $m^{\frac{n}{r}}$ e perché contribuisce $\phi(r)$ volte. □

Teorema. *Se n=p (primo) allora*

$$c(m) = \frac{(p-1)m + m^p}{p}$$

Dimostrazione. Dato n primo ha come divisori soli 1 e se stesso, gli unici termini che sopravvivono nella somma sono quelli con $\phi(p) = p - 1$ e $\phi(1) = 1$. □

Teorema. *Si dimostra che*

$$c(m) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m^{MCD(n,i)}$$

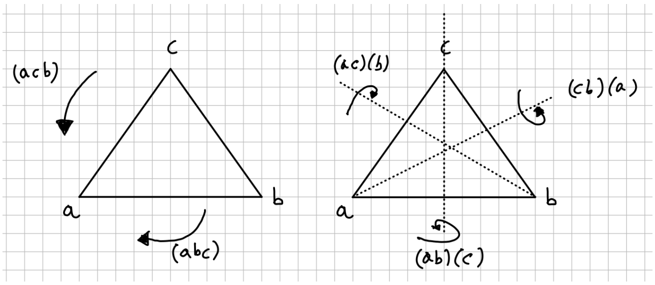
(2) Notare che se $m = 1$ si ha $c(m) = 1$,come dev'essere per un solo colore, a causa della proprietà della funzione di Eulero:

$$\sum_{r|n} \varphi(r) = n$$

6.4. Braccialetti

A differenza delle collanine, nei braccialetti sono ammesse anche le trasformazioni che invertono l'ordine dei colori. Quindi, la simmetria è quella del un poligono regolare di n vertici, e cioè il *gruppo diedrale* D_n.

Consideriamo il braccialetto più semplice di tutti: il triangolo equilatero di vertici a, b, c:



Il gruppo di simmetria $G = D_3$ è fatto non solo dalle 3 rotazioni rispetto al baricentro di $\{0, \pm 120^\circ\}$, ma anche dalle 3 rotazioni intorno alle mediane, per un totale di $|G| = 6$ trasformazioni:

rotazione	*decomposizione*	*modello*	*codifica*
R_0	$(a)(b)(c)$	$(\star)(\star)(\star)$	m^3
R_{120}	(acb)	$(\star\star\star)$	m
R_{-120}	$R_{120}^{-1} = (abc)$	$(\star\star\star)$	m
S_{ab}	$(ab)(c)$	$(\star\star)(\star)$	$m \cdot m = m^2$
S_{cb}	$(cb)(a)$	$(\star\star)(\star)$	$m \cdot m = m^2$
S_{ac}	$(ac)(b)$	$(\star\star)(\star)$	$m \cdot m = m^2$

Usando la codifica algebrica già vista per le collanine, si ha:

$$c_3(m) = \frac{1}{6}\left(m^3 + 3m^2 + 2m\right)$$

Per due colori, ad esempi, le configurazioni totali, sono 4.

6.5. Teorema di Polya

Le funzioni $c(m)$ ci danno *il totale* delle configurazioni con m colori ma, ad esempio, non ci dicono quante sono quelle fatte con 2 rossi, 3 verdi e 5 blu. Per rispondere a questa domanda c'è il *Teorema di Polya*.

Indicati con $\{x, y, z, \dots\}$ gli m colori, è possibile scrivere il seguente polinomio:

$$\boxed{Z[x, y, z, \dots] = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \prod_r (x^r + y^r + z^r + \cdots)^{\alpha_r(\pi)}}$$

dove G è il sottogruppo di simmetria del nostro sistema è, $|G|$ è il numero di elementi del gruppo e $\alpha_r(\pi)$ sono i *sottociclici* di dimensione r in cui si scompone la permutazione π.

Sviluppando Z in potenze delle $x, y, z, \dots$ si ottiene:

$$Z = \sum_{ij} c_{ij} x^i y^j$$

Il coefficiente c_{ij} rappresenta il numero di configurazioni con i colori x e j colori y.

Nel caso del triangolo con due soli x, y, avremmo:

$$Z = \frac{(x+y)^3+2(x^3+y^3)+3(x^2+y^2)(x+y)}{6} = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$$

Se siamo interessati soltanto al *numero totale* di colorazioni possibili, cioè alla quantità $\sum_{ij} c_{ij}$, basterebbe sostituire ognuna delle m variabili di colore con $x = 1$, $y = 1$, etc, per avere la forma semplificata del cycle-index, usata nei paragrafi precedenti:

$$c(m) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \prod_r m^{\alpha_r(\pi)} = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} m^{\sum_r \alpha_r(\pi)} = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} m^{cycle(\pi)}$$

dove $cycle(\pi)$ è il numero totale di cicli in π.

Se indichiamo con $\left[{n \atop r}\right]$ il numero delle permutazioni di S_n che si decompongono in r cicli [3], possiamo raggruppare le potenze

[3] Questi sono i *numeri di Stirling di I specie* (vedi appendici).

con lo stesso esponente m^r e scrivere:

$$\boxed{c_n(m) = \frac{1}{n!}\sum_r \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} m^r}$$

Nel seguito, alcuni di questi polinomi $c_n(m)$ al variare di n:

$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{6}\left(m^3+3m^2+2m\right) \\ 4 & \frac{1}{24}\left(m^4+6m^3+11m^2+6m\right) \\ 5 & \frac{1}{120}\left(m^5+10m^4+35m^3+50m^2+24m\right) \\ 6 & \frac{1}{720}\left(m^6+15m^5+85m^4+225m^3+274m^2+120m\right) \end{pmatrix}$$

6.6. Problemi

1. *In quanti modi si può colorare una collana di 8 perline e 3 colori?*

   In generale, per m colori si ha:

   $$c_8(m) = \frac{1}{8}\left(m^8+m^4+2m^2+4m\right)$$

   e quindi:

   $$c_8(8) = 834$$

2. *Quante collane si possono fare con 4 perline e 4 colori?*

   In generale, per m colori si ha:

   $$c_4(m) = \frac{1}{4}\left(m^4+m^2+2m\right)$$

   e quindi:

   $$c_4(4) = 70$$

3. *Quanti braccialetti si possono fare con 4 perline e 4 colori?*

   In generale, per m colori si ha:

$$c_4(m) = \frac{1}{24}\left(m^4 + 6m^3 + 11m^2 + 6m\right)$$

e quindi:

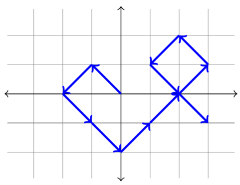
$$c_4(4) = 35$$

4. *Determinare il cycle-index del dodecagono regolare*

$$12!c(m) = m^{12} + 66m^{11} + 1925m^{10} + 32670m^9 + 357423m^8 + 2637558m^7 + 13339535m^6 + 45995730m^5 + 105258076m^4 + 150917976m^3 + 120543840m^2 + 39916800m$$

Capitolo 7

Percorsi su reticoli



Per *reticolo* piano si intende un modello matematico di spazio discreto, fatto di punti $V \subset \mathbb{N}^{2}$[1] mentre per *percorso* (o *cammino*) si intende un insieme di punti di V connessi tra loro.

Il conteggio dei percorsi (*lattice paths)* soggetti a determinate condizioni sono un argomento classico della matematica combinatoria, e sul quale la ricerca è ancora molto attiva. Essi possono fare da modello in tantissime aree, apparentemente lontane tra di loro.

In questo capitolo trattiamo solo reticoli nel primo quadrante R^2 (quindi $x, y \geq 0$) e, normalmente, i percorsi partono da $(0, 0)$, per terminare in un punto generico (n, m), ma più spesso in (n, n), o anche $(2n, 0)$.

Normalmente, il conteggio viene determinato usando complesse bijezioni tra insiemi. Noi, al solito, proveremo con

(1) O anche $V \subset R^2$, per reticoli di forma arbitraria: pentagonali, triangolari, etc.

le funzioni generatrici (GF); in particolare, funzioni a più variabili, dove ogni variabile conteggerà qualcosa a cui siamo interessati (il numero di salite, il numero di picchi, etc).

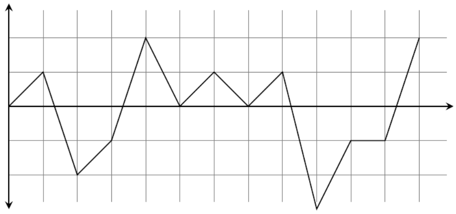
La prima cosa da stabilire sono i *passi* base. Esempio: x rappresenterà un passo verso Est; y rappresenterà un passo verso Nord; xy un passo lungo la diagonale NE; $x + xy^2$ potrebbe rappresentare «un passo verso Est *oppure* un passo verso Est seguito da due passi verso Nord», etc.

In questo capitolo useremo essenzialmente *percorsi diretti*, con i seguenti possibili passi (*step*)

(a) $[\nearrow, \searrow]$, collettivamente indicati con $xy^{\pm 1} = x(y + \frac{1}{y})$

(b) $[\rightarrow, \uparrow]$, collettivamente indicati con $x + y$

7.1. Percorsi diretti senza restrizioni



Si tratta di partire dal passo base e ripeterlo un numero indefinito di volte: $\left[x(y + \frac{1}{y})\right]^*$, quindi

$$F(x,y)=\frac{1}{1-x\left(y+\frac{1}{y}\right)}=\sum_{n\geq 0}[x(y + \frac{1}{y})]^n$$

Alcuni termini della serie:

$$x^4\left(y^4+\frac{1}{y^4}+4y^2+\frac{4}{y^2}+6\right)+x^3\left(y^3+\frac{1}{y^3}+3y+\frac{3}{y}\right)+$$
$$x^2\left(y^2+\frac{1}{y^2}+2\right)+x\left(y+\frac{1}{y}\right)+1$$

Come interpretare questi sviluppi? Semplice: prendiamo, ad esempio, i coefficienti di x^4y^2 e di x^3y^{-1}: essi ci dicono che il numero di percorsi che finiscono nel punto $(4,2)$ è 4 e quelli che finiscono in $(3,-1)$ sono 3. Il termine noto dà conto del percorso nulli x^0y^0, e vale quindi 1.

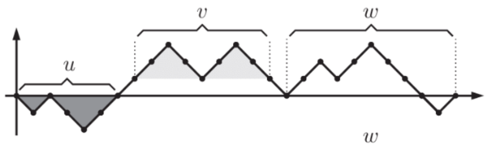
Porre $y = 1$ equivale a dire che non si è interessati al conteggio separato sull' ordinata y. In questo caso, la GF somma tutte le possibilità:

$$F(x,1)=\frac{1}{1-2x}=\sum_{n\geq 0} 2^n x^n$$

Il percorsi diretti tra $(0,0)$ e $(n,?)$ sono quindi 2^n, risultato a cui potevamo arrivare col calcolo diretto: ad ogni passo in direzione x abbiamo 2 possibiliti passi in direzione y, e quindi 2^n.

7.2. Bridge

Si chiamano *bridge* (vedi figura) i percorsi in cui la y può avere qualsiasi segno, ma il percorso deve terminare in $y = 0$.



Dobbiamo partire da quelli «senza restrizioni» F, e selezionare la parte di GF in cui non c'è la y.

Lo sviluppo di queste GF contiene potenze di y sia positive che negative:

$$F = B + \left(\frac{a}{y} + \frac{b}{y^2} + \ldots\right) + \left(cy + dy^2 + \ldots\right)$$

A noi serve B. Per determinarlo, useremo il *teorema dei residui*: esso afferma che, se integriamo una funzione su una circonferenza nel piano complesso z, contenente lo zero, tutte le potenze di z (positive e negative) scompaiono, tranne il termine che contiene $\frac{1}{z}$. E' chiaro quindi che se calcoliamo $\frac{F}{y}$, nel secondo membro contribuisce solo $\frac{B}{y}$, e saremo in grado di dedurre B. Per applicare questa idea, scomponiamo il denominatore di $\frac{F}{y}$ in fatori $(y - y_1)(y - y_2)$ e concentriamoci sulla soluzione y_1 che si annulla per $x \to 0$, nel nostro caso, $y_1 = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x}$.

Se scriviamo F nella forma $\frac{F}{y} = \frac{A(y)}{(y-y_1)}$ e integriamo i due membri sulla variabile complessa y, determiniamo $B = A(y_1)$:

$$\boxed{\text{B=}\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}}$$

Alcuni termini dello sviluppo:

$$1 + 2x^2 + 6x^4 + 20x^6 + 70x^8 + O\left(x^{10}\right) + \ldots$$

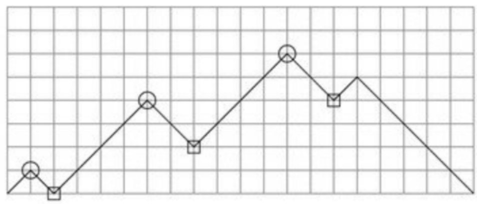
Si può dimostrare che i coefficienti della serie $B = \sum_n b_n x^{2n}$, hanno una espressione in forma chiusa data da $B_n = \binom{2n}{n}$.

Alcuni valori:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 20 & 70 & 252 & 924 & 3432 & 12870 \end{pmatrix}$$

7.3. Escursioni

Si definisco *escursioni (Dyck path)* i percorsi in cui è sempre $y \geq 0$, col percorso che termina in $y = 0$, dopo un numero pari $2n$ di passi, cioè della forma $(0,0) \to (2n,0)$ (vedi figura).



Questo tipo di path viene classificato in base alla prima volta in cui tocca l'asse x. Detta $C(x)$ la funzione generatrice, consideriamo i percorsi «sollevati», cioè i percorsi che partono con un passo xy e terminano con un passo xy^{-1} . La loro generatrice è

$$\hat{C} = (xy)C(xy^{-1}) = x^2C.$$

Ne consegue che un dyck path è un path vuoto oppure un dyck path «sollevato», seguito da un dyck path:

$$C = 1 + \hat{C}C = 1 + (xy)C(xy^{-1})C$$

per cui:

$$C = 1 + x^2C^2$$

Risolvendo l'equazione ricorsiva per C[2] si ha:

$$C=\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x^2}$$

[2] Delle sue radici, si prende quella che non diverge per $x = 0$.

Lo sviluppo è:

$$C{=}1 + x^2 + 2x^4 + 5x^6 + 14x^8 + 42x^{10} + 132x^{12} + 429x^{14} + 1430x^{16} + 4862x^{18} + O\left(x^{20}\right){+}\ldots$$

Si dimostra che $C = \sum_n C_n x^{2n}$, dove

$$\boxed{C_n{=}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}$$

sono i famosi *numeri di Catalan.*

Eccone alcuni:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 14 & 42 & 132 & 429 & 1430 \end{pmatrix}$$

Si tratta di una serie talmente importante che R. Stanley ci ha scritto sopra un intero libro [3] , fornendo 214 diverse definizioni dei numeri di Catalan, tutte equivalenti.

I numeri C_n soddisfano una ridda infinita di interessanti identità, ma la più importante è sicuramente la seguente:

$$\boxed{C_{n+1}{=}C_0C_n{+}C_1C_{n-1}{+}\ldots{+}C_nC_0}$$

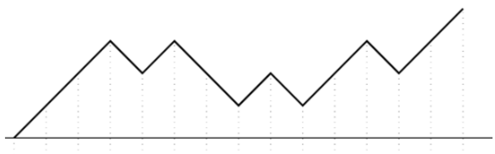
Essa mostra l'uso base dei numeri di Catalan: *costruire strutture di dimensione* $n+1$ *combinando insieme due strutture di dimensione più piccola.*

Per alcune applicazioni specifiche di questi numeri, vedi la sezione «Esempi».

(3) *«Catalan Numbers», Cambridge Univ. Press, 2015.*

7.4. Meandri

Si definisco *meandri* i percorsi in cui è sempre $y \geq 0$, ma il percorso non deve necessariamente annullarsi alla fine (vedi figura).



Per scrivere la loro funzione generatrice $M(x, y)$, si sfrutta la conoscenza dei path nulli agli estremi, C. Un path di tipo M può essere:

(a) il path vuolto (1);

(b) un path M seguito da salita xy ;

(c) un path che non si annulla agli estremi $(M - C)$, seguito da una discesa xy^{-1}.

In formule:

$$M = 1 + (xy)M + (xy^{-1})(M - C)$$

Risolvendo la relazione ricorsiva si ha:

$$M(x,y) = -\frac{\sqrt{1-4x^2}+2xy-1}{2x(xy^2+x-y)}$$

Uno sviluppo parziale per 8 passi x sarebbe:

$$M = x^8\left(y^8 + 7y^6 + 20y^4 + 28y^2 + 14\right) + x^7\left(y^7 + 6y^5 + 14y^3 + 14y\right) + x^6\left(y^6 + 5y^4 + 9y^2 + 5\right) + x^5\left(y^5 + 4y^3 + 5y\right) + x^4\left(y^4 + 3y^2 + 2\right) + x^3\left(y^3 + 2y\right) + x^2\left(y^2 + 1\right) + xy + 1 + \ldots$$

Esempio. Quanti sono i meandri che finiscono nel punto (4,2)?

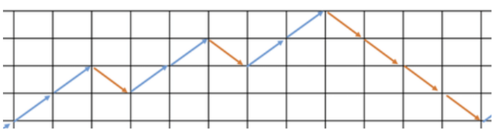
Soluzione. Il coefficiente di x^4 è:

$$y^4 + 3y^2 + 2$$

Questo vuol dire che, tra i percorsi che finiscono in $x = 4$, quelli che finiscono in $y = 2$ sono 3. Notare, che nessuno finisce in $(4, 3)$, e questo non sarebbe stato facile da dimostrare con altre tecniche.

7.5. Picchi

Sono i *Dyck path*, cioè $y \geq 0$ e nulli agli estremi, ma classificati in base ai picchi, cioè alle sequenze $(xy)(xy^{-1})$ (individuate con la lettera t). Nella figura seguente, un esempio con 3 picchi.



Per calcolare la funzione generatrice $W(x, t)$, consideriamo dapprima i path P strettamente positivi $y > 0$ e nulli agli estremi. Essi si possono costruire in maniera da evidenzare i nuovi picchi creati:

(a) «sollevando» un path vuoto si produce un picco. In formula $(xy)(1)(xy^{-1})t = x^2t$

(b) «sollevando» un path non-vuoto non si producono nuovi picchi. In formule: $(xy)(W - 1)(xy^{-1}) = x^2(W - 1)$

In totale:

$$P = x^2(W-1) + x^2 t = x^2(W-1+t)$$

Tenendo conto che i path W si trovano cancatenando un numero qualsiasi di path P, si ha $W = (P^*) = \frac{1}{1-P}$. Eliminando P dalle due equazioni, si ottiene la complicata espressione:

$$W(x,t) = \frac{-tx^2 - \sqrt{(tx^2-x^2-1)^2 - 4x^2} + x^2 + 1}{2x^2}$$

Ponendo $t = 1$ nella formula per W, si devono ritrovare i *Dyck path* $C(x)$. E infatti:

$$W(x,1) = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x^2}$$

Uno sviluppo parziale per 8 passi x darebbe:

$$W = \left(t^2+t\right)x^4 + \left(t^3+3t^2+t\right)x^6 + \left(t^4+6t^3+6t^2+t\right)x^8 + tx^2 + 1 + \ldots$$

Esempio. Classificare i percorsi che finiscono nel punto (8,0) in base al numero di picchi.

Soluzione. E' sufficiente leggere il coefficiente della giusta potenza di t dalla parte che moltiplica x^8, che è:

$$t^4 + 6t^3 + 6t^2 + t$$

Quindi: abbiamo un path con 4 picchi; 6 path con 3 picchi; 6 path con 2 picchi e 1 path con 1 picco.

7.6. Doppie salite

Sono i *Dyck path*, cioè $y \geq 0$ e nulli agli estremi, ma classificati in base alle doppie-salite, cioè alla presenza della sequenza x^2 (contate con la lettera t).

Per calcolare la funzione generatrice $W(x,t)$, consideriamo di nuovo i path P strettamente positivi $y > 0$ nulli agli estremi. Essi si possono costruire in maniera da evidenzare le nuove doppie-salite create:

(a) «sollevando» un path vuoto si produce una salita, ma non una doppia-salita. Questi corrispondo a t^0. In formula $x^2 t^0 = x^2$.

(b) «sollevando» un path non-vuoto $W - 1$ si produce una nuova doppia-salita. In formule: $(x^2)(W-1)t$

In totale:

$$P = x^2(W-1)t + x^2 = x^2(t(W-1)+1)$$

Tenendo conto che i path W si trovano cancatenando un numero qualsiasi di path P, si ha $W = (P^*) = \frac{1}{1-P}$. Eliminando P dalle due equazioni, si ottiene la complicata espressione:

$$W(x,t) = \frac{tx^2 - \sqrt{(-tx^2+x^2-1)^2 - 4tx^2} - x^2 + 1}{2tx^2}$$

Anche in questo caso, ponendo $t = 1$ nella formula per W, si ritrovano i *Dyck path:*

$$W(x,1) = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x^2}$$

Uno sviluppo parziale per 8 passi sarebbe, ad esempio:

$$W{=}1 + x^2 + x^4\left(1 + t + O\left(t^{25}\right)\right) +$$
$$x^6\left(1 + 3t + t^2 + O\left(t^{25}\right)\right) +$$
$$x^8\left(1 + 6t + 6t^2 + t^3 + O\left(t^{25}\right)\right) + O\left(x^9\right) + \ldots$$

Esempio. Classificare i percorsi che finiscono nel punto (8,0) in base al numero di picchi.

Soluzione. E′ sufficiente leggere il coefficiente della giusta potenza di t dalla parte che moltiplica x^8, che è:

$$t^3 + 6t^2 + 6t + 1$$

Quindi: abbiamo un path con 3 doppie-salite; 6 path con 2 e 1 salita; 1 path senza doppie-salite.

Per le doppie discese y^2 il procedimento è abbastanza analogo.

7.7. Passi di ritorno

I passi di ritorno (*return steps)* sarebbero i passi consecutivi del tipo xy^{-1} che portano allo zero finale, conteggiati con la lettera t. Consideriamo qui solo *Dyck path.*

I path P che si annullano solo agli estremi sono $P = x^2tC$. Tenendo conto che i path W si trovano cancatenando un numero qualsiasi di path P, si ha $K = (P^*) = \frac{1}{1-P}$, possiamo eliminare P dalle due equazioni, trovando

$$W(x,t){=}\frac{2}{t\left(\sqrt{1-4x^2}-1\right)+2}$$

Uno sviluppo parziale per 8 passi x sarebbe, ad esempio:

$$1 + x^2\left(t + O\left(t^9\right)\right) + x^4\left(t + t^2 + O\left(t^9\right)\right) +$$
$$x^6\left(2t + 2t^2 + t^3 + O\left(t^9\right)\right) +$$
$$x^8\left(5t + 5t^2 + 3t^3 + t^4 + O\left(t^9\right)\right) + O\left(x^9\right) + \ldots$$

Esempio. Classificare i percorsi che finiscono nel punto (8,0) in base al numero di doppie-discese

Soluzione. E′ sufficiente leggere il coefficiente della giusta potenza di t dalla parte che moltiplica x^8:

$$t^4 + 3t^3 + 5t^2 + 5t$$

7.8. Percorsi monotoni

Sono i percorsi ottenubili con la ripetizione dei passi $[\rightarrow, \uparrow]$, cioè destra=x e sopra=y. La loro funzione generatrice è una concatenazione indefinita del set $x + y$:

$$W(x, y) = \sum_{n \geq 0} (x + y)^n = \frac{1}{1 - (x + y)}$$

In base allo sviluppo del binomio, sappiamo che quelli che finiscono in $x^a y^b$ sono proprio $\binom{a+b}{a}$.

Uno sviluppo parziale per massimo 6 passi x e 6 passi y darebbe:

$$\begin{gathered}
x^6 \left(924y^6 + 462y^5 + 210y^4 + 84y^3 + 28y^2 + 7y + 1\right) + \\
x^5 \left(462y^6 + 252y^5 + 126y^4 + 56y^3 + 21y^2 + 6y + 1\right) + \\
x^4 \left(210y^6 + 126y^5 + 70y^4 + 35y^3 + 15y^2 + 5y + 1\right) + \\
x^3 \left(84y^6 + 56y^5 + 35y^4 + 20y^3 + 10y^2 + 4y + 1\right) + \\
x^2 \left(28y^6 + 21y^5 + 15y^4 + 10y^3 + 6y^2 + 3y + 1\right) + \\
x \left(7y^6 + 6y^5 + 5y^4 + 4y^3 + 3y^2 + 2y + 1\right) + y^6 + y^5 + y^4 + \\
y^3 + y^2 + y + 1 + \ldots
\end{gathered}$$

Esempio. Quanti sono i percorsi monotoni che finiscono nel punto (4,6)?

Soluzione. E′ sufficiente leggere il coefficiente di $x^4 y^6$, che (dopo una rapida ispezione del risultato precedente) è 210.

Consideriamo nel seguito solo i path monotoni che del tipo $(0,0) \rightarrow (n,n)$, cioè che partono e finiscono sulla diagonale $y = x$.

7.8.1. Percorsi che *toccano* la diagonale

Partiamo da quelli che toccano la diagonale solo all'inzio e alla fine. Essi non sono altro che i *Dyck path* ruotati di 45 gradi. Infatti, con la rotazione di 45 gradi, i passi destra-sopra e destra-sotto diventano passi x o passi y.

Consideriamo ora le sequenze xCy e yCx di "allontanamento" di questi path dalla diagonale. Esse contano per $2x^2C$ e producono un nuovo tocco t sulla diagonale. Concatenandole all'infinito, si ha $W = (2x^2tC)^*$, e quindi:

$$W = \frac{1}{1 - 2x^2t \cdot C}$$

Uno sviluppo parziale per 8 passi x darebbe:

$$\left(4t^2 + 2t\right) x^4 + \left(8t^3 + 8t^2 + 4t\right) x^6 + \\ \left(16t^4 + 24t^3 + 20t^2 + 10t\right) x^8 + 2tx^2 + 1 + \ldots$$

Notare che per t=1 troviamo il totale dei percorsi monotoni $(0,0) \rightarrow (n,n)$:

$$W(x,1) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$$

e non sono altro che i bridge $(0,2n)$ ruotati di 45 gradi:

Esempio. Quanti sono i percorsi che finiscono nel punto (6,6) e che toccano la diagonale 3 volte?

Soluzione. Prendendo il coefficiente di x^6t^3, si trova 8.

7.8.2. Percorsi che *attraversano* la diagonale

Consideriamo i *Dyck path* non vuoti, $C-1$, ruotiamoli di 45 gradi, e mettiamoli in sequenza: $[(C-1)t]^{*(4)}$:

$$W(x,t)=\frac{2}{1-t\left(\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x^2}-1\right)}=\frac{4x^2}{t\left(2x^2+\sqrt{1-4x^2}-1\right)+2x^2}$$

Uno sviluppo parziale per 8 passi x darebbe:

$$\left(2t^2+4t\right)x^4+\left(2t^3+8t^2+10t\right)x^6+$$
$$\left(2t^4+12t^3+28t^2+28t\right)x^8+2tx^2+2+\ldots$$

Esempio. Quanti sono i percorsi che finiscono nel punto (8,8) e che attraversano la diagonale 3 volte?

Soluzione. Prendendo il coefficiente di x^8t^3, si trova 12.

7.9. Applicazioni

7.9.1. I ballottaggi

Problema. *Due candidati, A e B, si affrontano in un duello elettorale, finito in parità dopo* $2n$ *passi. Con che probabilità il candidato A ha sempre* dominato *B, durante tutto il processo di votazione?*

Soluzione. Indichiamo il voto per A con xy e quello per B con xy^{-1}. L'intero processo di voto può essere schematizzato in un grafico (x,y), dove sull'asse X c'è il numero di voti già scrutinati, e sull'asse Y la somma dei voti, presi col loro segno. Dato che A e B pareggiano, la somma, alla

(4) Il risultato finale è stato moltiplicato per 2, per tener conto di quelli che sono «sotto» ma anche «sopra» la diagonale.

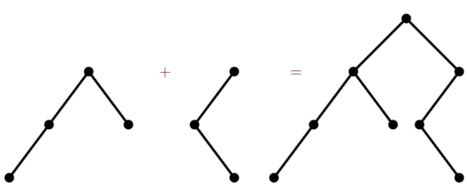
fine, deve fare zero, ma può essere positiva o negativa durante il percorso. Come è evidente, questi path sono tutti i *bridge* costruibili tra 0 e $2n$, cioè $B_n = \binom{2n}{n}$. I path in cui A domina B sono i path in cui $y \geq 0$, e quindi le *escursioni,* conteggiate dai numeri di Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Ne consegue che la probabilità è [5] :

$$p_n = \frac{C_n}{B_n} = \frac{1}{n+1}$$

7.9.2. Alberi binari

Negli alberi binari si parte da una radice (*root*) e, ad ogni passo, si fa una delle due scelte: sinistra, destra, ripetendo il processo un numero indefinito di volte.

Problema. *Quanti alberi binari si possono formare con n vertici?*



[5] Nel caso di ballottaggi con vittoria finale, che non trattiamo, detti a e b i voti ottenuti dai due candidati, di dimostra che il numero di possibili votazioni in cui vince A (cioè $a > b$) ed è altresì *dominante* su B, è

$$A_{ab} = \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a}$$

mentre le votazioni possibili sono $\binom{a+b}{a}$, per cui

$$p_{ab} = \frac{a-b}{a+b}$$

Soluzione. Gli alberi formabili con n vertici sono proprio C_n.

Dimostrazione. Immaginiamo di voler contare i C_5. Partiamo dalla *radice* e chiediamoci: quanti sottoalberi posso «attaccare» a sinistra e a destra? Ne potrei mettere C_4 a sx e C_0 (cioè nessuno) a dx). In questo modo avrei i 4 vertici di C_4 più il vertice di destra, rimasto penzolante: $4 + 1 = 5$. Ma anche C_3 a sinistra e C_1 a destra andrebbero bene, e via di seguito:

$$C_5 = C_4C_0 + C_3C_1 + \dots C_0C_4$$

Ma questi non sono altro che i numeri di Catalan, e la tesi è dimostrata. □

Alternativamente:

Dimostrazione. Indichiamo con xy il passo a sinistra e xy^{-1} il passo a destra. Un albero può essere vuoto oppure la composizione di albero di sinistra $(xy)C$ e un albero di destra $(xy^{-1})C$, per cui:

$$C = 1 + (xy)C(xy^{-1})C = 1 + x^2C^2$$

Ma questa è proprio la relazione ricorsiva che definisce i numeri di Catalan. □

7.9.3. Parenthesis matching

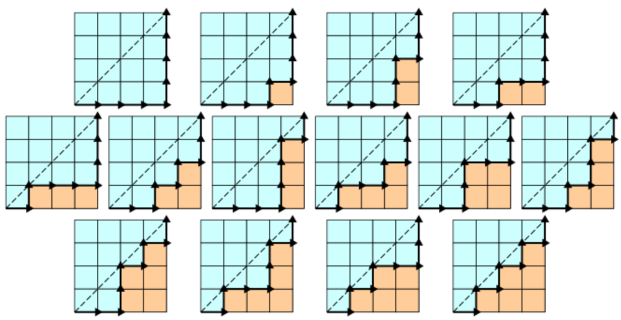
Problema. *In quanti modi n coppie di parentesi (), possono essere correttamente aperte e chiuse in un testo?*

Soluzione. Per n=3, avremo, ad esempio,

$$((())), \quad (()()), \quad ()()(), \ldots$$

Detta xy la parentesi aperta e xy^{-1} la parentesi chiusa, si tratta delle escursioni (x, y) lunghe $2n$, per cui sono in tutto C_n.

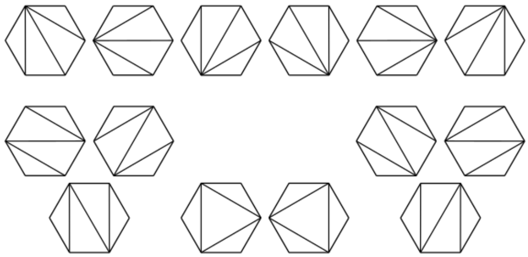
7.9.4. Percorsi sotto la diagonale



Problema. *Quanti sono i percorsi da $(0,0)$ a (n,n) che non superano la diagonale $y = x$, ma al massimo la toccano?*

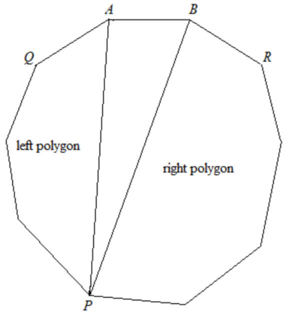
Soluzione. Si tratta delle escursioni ruotate di 45 gradi, per cui la risposta è ancora C_n

7.9.5. Triangolarizzazioni



Problema. *In quanti modi un poligono convesso di n vertici si può decomporre in triangoli, senza far intersecare i lati?*

Soluzione. La risposta è C_{n-2}.



Dimostrazione. [6] Sia T_n il numero di triangoli cercato. Con riferimento alla figura, dove abbiamo un poligono con 10 vertici, sia PAB uno dei triangoli facente parte della triangolarizzazione. E' facile rendersi conto che quando P risale fino a Q, nella zona di sinistra (*left polygon)* vi entrano T_3

[6] Credito: Brian M. Scott, https://math.stackexchange.com/.

possibili triangolarizzazioni e in quella di destra (*right polygon)* T_9, per un totale di $T_3 T_9$ possibilità. Ragionamento analogo si può fare spostando P, di un passo alla volta, in direzione di R: $T_4 T_8$, $T_5 T_7$, etc, ottendo complessivamente:

$$T_{10} = T_3 T_9 + T_4 C_8 + \dots T_9 T_3$$

Notiamo che $3 + 9 = 4 + 8 = \cdots = 12$, per cui si può soddisfare l'equazione semplicemente ponendo $T_n = C_{n-2}$. $\square$

Nota

Osservare che

$$\begin{aligned} T(z) = \sum_{n \geq 1} C_{n-2} z^n = \sum_{m \geq 1} C_m z^{m+2} = \\ = z^2 \sum_{m \geq 1} C_m z^m = z^2 (C(z) - 1) \end{aligned}$$

Sviluppando fino a poligono di 20 lati, si ha

$$\begin{gathered} T = z^3 + 2z^4 + 5z^5 + 14z^6 + 42z^7 + 132z^8 + 429z^9 + \\ 1430z^{10} + 4862z^{11} + 16796z^{12} + 58786z^{13} + 208012z^{14} + \\ 742900z^{15} + 2674440z^{16} + 9694845z^{17} + 35357670z^{18} + \\ 129644790z^{19} + O\left(z^{20}\right) \end{gathered}$$

per cui il quadrato si triangolarizza in 2; il pentagono in 5; l'esagono in 14 modi, etc. (vedi figura in testa al paragrafo).

Capitolo 8

Esercizi

Il metodo algebrico si è rivelato utile nel risolvere problemi complicati, specie quelli implicanti sequenze di lettere con condizioni e/o limitazioni, ma i problemi più semplici, cioè quelli per i quali è sufficiente un conteggio diretto, si affrontano normalmente usando le opportune formule.

Per comodità del Lettore, in questo capitolo viene riportata sia una tabella con le formule più comuni, sia una lista di problemi esemplificativi, classificati per livello di difficoltà.[1]

Nella tabella che segue, si usa questa convenzione: n *è il numero di una certa quantità di palline numerate (rappresentate con delle lettere: ABC ....), e* k *è il numero di scatole in cui le palline vengono poste. Se due lettere sono in una stessa scatola, vuol dire che il loro ordine non conta (AB=BA). Generalmente, l'ordine* delle scatole *conta, a meno che il risultato non sia diviso per* $k!$ *Notare anche che, in qualche caso, è ammesso avere scatole vuote, rappresentate col simbolo* $\square$.

[1] Warning: Benchè li abbia ricontrollati, questi esercizi potrebbero contenere degli errori.

8.1. Formulario

Simbolo	*Esempi*	*Formule*
$D_{n,k}$ (*disp.*)	$\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{B}}, \boxed{\mathrm{B}}\boxed{\mathrm{A}}$	$n^{(k)} = \overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots}^{k}$
$D^r_{n,k}$ (*disp. rip.*)	$\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{B}}, \boxed{\mathrm{B}}\boxed{\mathrm{A}}, \boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{B}}, \boxed{\mathrm{B}}\boxed{\mathrm{B}}$	n^k
$C_{n,k}$ (*comb.*)	$\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{B}}$	$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots}^{k}}{k!}$
$C^r_{n,k}$ (*comb. rip.*)	$\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{A}}, \boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{B}}, \boxed{\mathrm{B}}\boxed{\mathrm{B}}$	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \frac{\overbrace{n(n+1)(n+2)\cdots}^{k}}{k!} = \binom{n+k-1}{k}$
$f : [n] \to [k]$(*tutte*)	$\boxed{\mathrm{AB}}\boxed{\phantom{\mathrm{A}}}\boxed{\mathrm{C}}\ldots$	k^n
$f : [n] \to [k]$ (*iniett.*)	$\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\phantom{\mathrm{A}}}\boxed{\mathrm{B}}\boxed{\mathrm{C}}\ldots$	$k^{(n)} = \overbrace{k(k-1)(k-2)\cdots}^{n}$
$f : [n] \to [k]$ (*surg.*)	$\boxed{\mathrm{AB}}\boxed{\mathrm{C}}\ldots, \boxed{\mathrm{C}}\boxed{\mathrm{AB}}\ldots$	$S_{n,k} = k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n + \cdots$
set-partitions (*Stirling II*)	$\boxed{\mathrm{AB}}\boxed{\mathrm{C}}\boxed{\mathrm{DEFG}}\ldots$	$\left\{ n \atop k \right\} = \frac{S_{n,k}}{k!} = \frac{k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n + \cdots}{k!}$
dadi con f facce	prob. somma k con n lanci	$p(k) = \frac{1}{f^n} \sum_{r=0}^{\left[\frac{k-n}{f}\right]} (-1)^r \binom{n}{r}\binom{k-r\cdot f-1}{n-1}$

8.2. Esercizi facili

Seguono una serie di esempi in cui la soluzione si ottiene con l'applicazione di una sola delle formule precedenti.

(a) **Disposizioni**. *Quante parole di due lettere possiamo formare usando una sola volta i caratteri* $\{a, b, c\}$?

Soluzione. $D_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$: *ab,ba,ac,ca,bc,cb*

(b) **Disposizioni con ripetizione.** *Quante parole di due lettere possiamo formare usando ognuno dei caratteri* $\{a, b, c\}$, *quante volte ci pare?*

Soluzione. $D^r_{3,2} = 3^2 = 9$: *ab,ba,ac,ca,bc,cb* + *aa,bb,cc*

(c) **Combinazioni**. *Quanti gruppi di 2 lettere possiamo formare da 3 lettere, se l'ordine non conta?*

Soluzione. $C_{3,2} = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 3$: *ab,ac,bc*

(d) **Combinazioni con ripetizione**. *Quanti gruppi di 2 lettere possiamo formare da 3 lettere $\{a, b, c\}$ se non conta l'ordine e se possiamo prendere ogni lettera quante volte ci pare?*

Soluzione. $C^r_{3,2} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 6$: *ab,ac,bc+aa,bb,cc*

(e) **Equazione intere.** *In quanti modi possiamo distribuire 20 caramelle a 5 bambini, almeno 2 caramelle a bambino? In pratica, si cerca il numero di soluzioni $k_i \geq 2$ dell'equazione $k = k_1 + k_2 + \cdots k_n$.*

Soluzione. Basta dare preliminarmente 2 caramelle a ciascuno bambino, per cui ne restano da distribuire $k = 10$ tra $n = 5$. Anche se non sembra, è un problema di tipo C^r_{nk}. Infatti, si tratta di prendere k elementi da un insieme che ne contiene n, anche più volte. Dunque: $\left(\binom{5}{10}\right) = \binom{14}{10} = \binom{14}{4} = 1001$

(f) **Funzioni**.[2] *Quante sono le funzioni del tipo $f : \{a, b\} \to \{1, 2, 3\}$?*

Soluzione. $f(a)$ lo posso scegliere in 3 modi, $f(b)$ in 3 modi per cui $3^2 = 9$

(g) **Funzioni iniettive**. *Quante sono le funzioni iniettive del tipo $f : \{a, b\} \to \{1, 2, 3\}$?*

Soluzione. $f(a)$ lo posso scegliere in 3 modi, ma $f(b)$ solo in 2, per cui $3 \cdot 2 = 6$

(h) **Funzioni surgettive**. *Quante sono le funzioni surgettive del tipo $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2\}$?*

[2] $\{a, b\}$, non $[a, b]$:-)

Soluzione. $2^3 - \binom{2}{1}1^3 = 8 - 2 \cdot 1 = 6$. Notare che, in questo caso, non ve ne sono di iniettive (dato che 3 lettere vanno associate a 2 numeri), mentre il totale delle funzioni è $2^3 = 8$. Questo vuol dire che ve ne sono 2 *non-surgettive.*

(i) **Partizioni non-ordinate**. *In quanti modi modi 4 persone* $\{a, b, c, d\}$ *si possono suddividere in 3 gruppi non vuoti?*

Soluzione. $\frac{3^4 - \binom{3}{1}2^4 + \binom{3}{2}1^4}{3!} = \frac{81-48+3}{6} = 6$

(j) **Partizioni ordinate**. *In quanti modi modi 4 passeggeri* $\{a, b, c, d\}$ *si possono disporre in 3 carrozze (non vuote)?*

Soluzione. Ora l'ordine delle carrozze conta, per cui basta togliere il 3! dal denominatore del risultato precedente, ottenendo: $3^4 - \binom{3}{1}2^4 + \binom{3}{2}1^4 = 81 - 48 + 3 = 36$.

(k) **Disequazione intere.** *Quante sono le soluzioni positive o nulle della disequazione* $x + y + z \leq 200$*?*

Soluzione. E' lo stesso che risolvere l'equazione a 4 variabili: $x + y + z + w = 200$. Dobbiamo dare 200 caramelle a 4 bambini, per cui: $\left(\binom{4}{200}\right) = \binom{203}{200} = \binom{203}{3} = 1373701$

(l) **Monomi.** *Quanti monomi di grado 100 possiamo fare con le 3 lettere abc?*

Soluzione. Dobbiamo costruire i monomi $a^x b^y c^z$ usando esponenti tali che $x, y, z \geq 0$ e $x + y + z = 100$. Dunque: $\left(\binom{3}{100}\right) = \binom{102}{100} = \binom{102}{2} = 5151$.

(m) *Quanti sono i numeri naturali, con cifre tutte diverse, che si possono ottenere con le cifre* $\{1, 3, 5, 7, 9\}$*?*

Soluzione. Posto $n = 5$, quelli di una cifra sono n, quelli con due cifre sono $n \cdot (n-1)$, etc, per cui abbiamo $5 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + \cdots$

8.3. Esercizi intermedi

(a) *Quanti gruppi non vuoti di studenti posso estrarre da una classe di 20, se i gruppi devono essere di almeno 3 studenti?*

Soluzione. I sottogruppi di $n = 20$ studenti sono, in totale, 2^n. Da questi devo togliere i gruppi di 0,1 e 2 studenti, per cui: $2^n - \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right]$.

(b) *Quanti sono i numeri compresi tra 1 e 10000 aventi la somma delle cifre uguale a 8?*

Soluzione. Escludendo il 10000, che certamente non va contato, i numeri cercati sono nel range 0000 a 9999, e sono nella forma $xyzw$ con $x + y + z + w = 8$ e $x, y, z, w \in [0, 8]$. Il problema equivale a dare 8 caramelle a 4 bambini e quindi ai multiset $\left(\binom{4}{8}\right) = 165$.

(c) *Sia* $\Omega = 1, 2, ..., 7$. *Quanti sono i sottoinsiemi di* Ω *aventi la proprietà che la somma dei loro elementi sia un numero dispari?*

Soluzione. In Ω vi sonon 4 dispari. Per avere somma dispari, ne posso prendere uno solo d, in $\binom{4}{1}$ modi o tre ddd, in $\binom{4}{3}$ modi. I 3 pari li posso prendere in 2^3modi (cioè prendere o non prendere, per 3 volte). Risultato: $\left[\binom{4}{1} + \binom{4}{3}\right] \cdot 2^3 = 64$

(d) *Si vogliono distribuire 15 caramelle a tre bambini, Piero, Luigi e Gianni. Vogliamo che Piero ne riceva almeno 2, Luigi un numero qualsiasi e Gianni almeno 3. Dire in quanti modi è possibile distribuire le caramelle.*

Soluzione. Intanto, diamo subito 2 caramelle a Piero e 3 a Gianni. Ne restano 10 da distribuire liberamente, per cui $\left(\binom{3}{10}\right) = 66$.

(e) *Consideriamo i numeri da 1 a 36. Quante sono le sestine di numeri distinti che hanno almeno due numeri consecutivi, come ad esempio* $3, 7, 8, 15, 19, 32$*?*

Soluzione. Indichiamo con «a» i numeri non scelti e con «b» i numeri scelti. Collochiamo i 20 numeri non scelti su una riga: $\underbrace{aa\cdots a}_{30}$. Il numero richiesto si può determinare sottraendo da tutte sestine possibili, che sono $\binom{36}{6}$, le sestine «illegabili», cioè dove i «b» non sono mai consecutivi. Essi si trovano inserendo i 6 «b» nelle 31 posizioni tra gli «a», che sono in totale $\binom{31}{6}$. Risultato: $\binom{36}{6} - \binom{31}{6} = 1211511$.

(f) *In quanti modi diversi si possono disporre intorno a un tavolo rotondo 8 persone di cui 4 maschi e 4 femmine alternando maschi con femmine?*

Soluzione. Le disposizioni possibili sono solo $mfmfmfmf$ e $fmfmfmfm$, per cui $2 \cdot 4! \cdot 4!$.

(g) *6 maschi e 3 femmine devono disporsi intorno ad un tavolo circolare. La femmina* y_1 *deve stare per forza alla destra del maschio* x*, mentre la femmina* y_2 *non può stare vicino alla femmina* y_1*. Quante sono le possibili disposizioni?*

Soluzione. x e $y_1$formano un blocco unico, per cui y_1x. Lasciando fuori, per il momento, y_2, abbiamo quindi 7 blocchi da sistemare in cerchio, il che si può fare in $(7-1)! = 6!$ (*permutazioni cicliche* di 7 elementi). Gli spazi in cui possiamo inserire la seconda fanciulla y_2 sono 6, per cui abbiamo $6 \cdot 6!$ possibilità.

8.4. Esercizi (appena +) difficili

Gli esercizi più avanzati, in realtà, li trovi dispersi nel testo. Comunque, qui ne metto qualcun altro.

(a) *Quante sono le terne ordinate (x, y, z) , di numeri interi soddisfacenti le condizioni (a) $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$; (b) $x + y + z \leqslant 20$?*

Soluzione. Per tener conto dell'ordinamento delle tre variabili, conviene sostituirle con

$$x = a, y = a + b, z = a + b + c, d = 20 - x - y - z$$

In questo modo, il problema è equivalente a trovare le soluzioni intere e positive dell'equazione:

$$3a + 2b + c + d = 20$$

Il modo più semplice per risolvere questa equazione è usare le funzioni generatrici standard (vedi Cap 2). Infatti:
$\frac{1}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)} = \sum_{abcd} x^{3a+2b+c+d} = \cdots + a_{20}x^{20} + \cdots$

Usando un software per il calcolo algebrico, si trova a_{20}=358.

(b) **Esercizio sul PIE** *Se in una classe i sufficienti in Matematica sono 14, i sufficienti in Latino sono 16 e in Inglese 18, e si sa che 24 sono sufficienti in almeno una delle 3 materie e 10 sono sufficienti in tutte e 3, sarà possibile stabilire con certezza quanti studenti sono sufficienti a) in esattamente 2 materie? b) in almeno due materie? c) esattamente una materia?*

Soluzione. Occorre usare il PIE (principio di Inclusione-Esclusione, vedi **Appendice**): $|X| = \sum_i |X_i| - \sum_{ij} |X_i \cap X_j| + \sum_{ijk} |X_i \cap X_j \cap X_k| + \cdots$.
Metodo diretto Dai dati, sappiamo che $|X| = 24$, che $N(3) = \sum_{ijk} |X_i \cap X_j \cap X_k| = 10$ e che $N(\geq 1) = \sum_i |X_i| = 14 + 16 + 18 = 48$. a) Ricaviamo quindi che $N(\geq 2) = 34$. Da questi dobbiamo togliere quelli che

sono sufficienti anche nella terza materia, che sono $3 \cdot N(3) = 30$, ottenendo $N(2) = 34 - 30 = 4$ b) $N(2) + N(3) = 4 + 10 = 14$ c) $N(1) =$ 24-14=10.

Metodo inverso Usando la formula di inversione dell'Appendice PIE, possiamo evitare di gestire le duplicazioni insite nei numeri N, scrivendo immediatamente:

$$N(2) = N(\geq 2) - \binom{3}{2} N(\geq 3) = 34 - 3 \cdot 10 = 4$$

$$N(1) = N(\geq 1) - \binom{2}{1} N(\geq 2) + \binom{3}{1} N(\geq 3) = 48 - 2 \cdot 34 + 3 \cdot 10 = 10$$

Appendice A

Appendici

A.1. Sul numero di soluzioni di un equazione[1]

Come abbiamo visto del paragrafo dal titolo «Equazioni diofantee», il numero di soluzioni positive o nulle di un'equazione come:

$$2x + y + z = 10$$

si può ottenere sviluppando in serie la funzione $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1-x^2)} = \cdots + c \cdot x^{10} + \cdots$$

e recuperando il coefficiente che moltiplica x^{10}, in questo caso c=36.

Per un tale calcolo abbiamo varie possibilità, in linea di principio fattibili, ma in pratica tutte poco agevoli.

[1] Argomento avanzato

La prima, è usare un programma di calcolo simbolico, tipo *Mathematica, Maxima, Maple,* etc. La seconda è lo sviluppo di Taylor, secondo cui c si calcola con la la derivata decima di $f(x)$: $c = \frac{f^{(10)}(0)}{10!}$. Naturalmente, se il secondo membro fosse 100, invece che 10, ci vuole la derivata ... centesima.

C'è anche una terza possibilità, ancora più speculativa, *ma* che ha il pregio di fornire una *formula chiusa* per il numero di soluzioni di una qualsiasi equazione diofantea.

Per vedere come funziona, dividiamo i due membri dell'equazione per x^{11}:

$$\frac{f(x)}{x^{11}} = 182x^{14} + 169x^{13} + 156x^{12} + 144x^{11} + \frac{1}{x^{11}} + 132x^{10} + \frac{2}{x^{10}} + 121x^9 + \frac{4}{x^9} + 110x^8 + \frac{6}{x^8} + 100x^7 + \frac{9}{x^7} + 90x^6 + \frac{12}{x^6} + 81x^5 + \frac{16}{x^5} + 72x^4 + \frac{20}{x^4} + 64x^3 + \frac{25}{x^3} + 56x^2 + \frac{30}{x^2} + 49x + \frac{36}{x} + 42 + \cdots$$

Lo sviluppo (che è ovviamente infinito) contiene una parte con potenze positive x^n, e una parte con potenze negative, del tipo $\frac{1}{x^n}$. Un fanstastico teorema dell'Analisi Complessa afferma che: se si integra il secondo membro nel piano complesso, lungo una piccola circoferenza intorno al punto $z = 0$, tutti i termini *danno zero*, tranne il termine $\frac{c}{x}$, il quale dà $2\pi i \cdot c$ (*formula di Cauchy).*

Parametrizzando il contorno di integrazione in coordinate polari $z = r \cdot e^{ia}$, e scegliendo $r = 1/2$ (ma qualsiasi valore $r < 1$ andrebbe bene ...), si ha:

$$c = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{cerchio}} \frac{f(z)}{z^{41}} dz = \int_0^{2\pi} -\frac{8192 e^{-10ia}}{\pi(-2+e^{ia})^3 (2+e^{ia})} \text{da}$$

Come molte cose della Matematica, questa formula è bellissima quanto inutile, a meno che non si voglia calcolare l'integrale con qualche tecnica numerica approssimata.

Non disperiamo: un modo per calcolare «a mano» [2] il numero di soluzioni di un'equazione diofantea *c'è* ma non è né facile né agevole da applicare.

Esso si basa sul Principio di Induzione. Per dare una idea di come funziona, sostituiamo il secondo membro dell'equazione con n (per noi, ovviamente, $n = 10$):

$$2x + y + z = n$$

Sia $P_1(n)$ il numero di soluzioni dell'equazione con una sola incognita: $z = n$. Ovviamente, $P_1(n) = 1$. Passiamo ora all'equazione a due incognite: $y + z = n$. Per ogni valore di z, abbiamo a che fare con le soluzioni di un'equazione di una sola variabile y, $y = n - z$, per cui

$$\begin{aligned} P_2(n) = P_1(n) + P_1(n-1) + \cdots P_1(0) = \\ =&(n+1) \cdot 1 = (n+1) \end{aligned}$$

Aggiungiamo ora il termine $2x$, e calcoliamo le soluzioni di $y + z = n - 2x$, $P_3(n)$:

$$P_3(n) = P_2(n) + P_2(n-2) + P_2(n-4) + \cdots$$

Il problema è che l'ultimo termine della somma dipende dal fatto che n sia pari o dispari.

Se n è pari $n = 2m$, abbiamo:

$$\begin{aligned} P_3(2m) = \sum_{k=0}^{m} [(2m+1) - 2k] = (m+1)(2m+1) - 2\sum_{k=0}^{m} k = \\ =&(m+1)(2m+1) - 2 \cdot \frac{m}{2} \cdot (m+1) = (1+m)^2 = \\ =& \frac{n^2 + 4n + 4}{4} \end{aligned}$$

(2) cioè senza computer

se n è dispari $n = 2m + 1$: [3] :

$$P_3(2m+1) = \sum_{k=0}^{m} [(2m+2) - 2k] = (m+1)(m+2) =$$
$$= n^2 + 4n + 3$$

Se il termine da aggiungere fosse stato $3x$ e non $2x$, avremmo dovuto considerare separamente i casi $n = 3m, 3m+1, 3m+2$, in un'escalation di complessità che il Lettore può facilmente intuire.

Invariabilmente, però, quello che si ottiene è un poliniomo di un certo grado in n.

Nel nostro caso, essendo $n = 10$ pari, dobbiamo applicare la formula $P_3(2m)$, ottenendo:

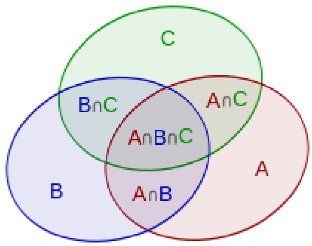
$$\frac{n^2 + 4n + 4}{4} = 36$$

il che conferma quanto trovato con lo sviluppo in serie.

A.2. Principio di Inclusione-Esclusione

Siano X_i una serie di sottoinsiemi di S e sia $X = \cup_i X_i$ la loro unione. In generale, i sottoinsiemi X_i hanno elementi a comune $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ e la loro unione X non ricopre interamente S.

[3] In entrambi i casi si è usato la formula del *giovane* Gauss: $\sum_{k=0}^{m} k = \frac{m \cdot (m+1)}{2}$.



Se pensiamo all'indice i come ad una *proprietà* che accomuna gli elementi dell'insieme X_i, $\sum_{ij} |X_i \cap X_j|$ sono gli elementi che hanno almeno due proprietà, $N(\geq 2)$, $\sum_{ijk} |X_i \cap X_j \cap X_k|$ quelli che hanno almeno 3 proprietà, $N(\geq 3)$, etc. Occorre fare attenzione a questo tipo di notazione. Infatti: molti elementi saranno contati più volte, perchè tra gli elementi che ha almeno 2 proprietà ce ne sono che ne hanno almeno 3, etc.

Quelli che hanno *zero o più proprietà* sono $|S|$, mentre quelli che hanno *esattamente zero* proprietà sono $|S| - |X|$. In simboli:

$$N(\geq 0) = |S|, \quad N(0) = |S| - |X|$$

Il PIE, in base ad un semplice conteggio delle sovrapposizioni, afferma che:

$$\boxed{|X| = \sum_i |X_i| - \sum_{ij} |X_i \cap X_j| + \sum_{ijk} |X_i \cap X_j \cap X_k| + \cdots}$$

Usando le notazioni $N(.)$, esso può essere scritto nella forma ancora più astratta:

$$N(0) = N(\geq 0) - N(\geq 1) + N(\geq 2) + \cdots$$

Si dimostra che tra gli elementi che hanno <u>*esattamente r*</u> proprietà $N(r)$ e gli elementi che hanno <u>*almeno r*</u> proprietà $N(\geq r)$ valgono delle«misteriose» *formule di inversione*. Ad esempio:

$$N(2) = N(\geq 2) - \binom{3}{2} N(\geq 3) + \binom{4}{2} N(\geq 4) - \cdots$$

Dimostrazione. Per contare quelli che ne hanno esattamente 2 partiamo da quelli che ne hanno *almeno* 2, $N(\geq 2)$, e cominciamo a sottrarre le duplicazioni. Uno che ne ha 3 conta anche per uno che ne ha 2, e in $\binom{3}{2}$ modi diversi. Sottraiamo quindi gli $\binom{3}{2} N(\geq 3)$, per averli già conteggiati. A questo punto, però, quelli che ne hanno 4 sono stati sottratti due volte: una volta come 3 e una volta come 4, per cui dobbiamo riaggiungerli nella forma $\binom{4}{2} N(\geq 4)$, e così di seguito. □

Come applicazione del PIE, risolviamo il problema delle n palline numerate in k scatole non vuote, mediante conteggio diretto. Teniamo presente che distribuendo n palline in a scatole, le disposizioni sono a^n, perchè le palline *cadono a pioggia* nelle scatole, e un certo numero di esse rimarranno certamente vuote. Dunque $N(\geq r) = (k-r)^n$ rappresenta le configurazioni con almeno r scatole vuote. Le configurazioni *con zero scatole vuote* $N(0)$, che sono quelle che interessano a noi, sono quindi:

$$\begin{aligned} N(0) = & N(\geq 0) - \binom{k}{1} N(\geq 1) + \binom{k}{2} N(\geq 2) - \cdots = \\ = & k^n - \binom{k}{1} (k-1)^n + \binom{k}{2} (k-2)^n + \cdots \end{aligned}$$

Dimostrazione. Come si vede, questo non è altro che $k! \left\{ {n \atop k} \right\}$. □

A.3. Numeri di Stirling di I specie

Una permutazione ciclica è una sequenza ciclica di sostituzioni dell'insieme $[n]$.

Esempio: la permutazione ciclica (123), equivale alla sequenza di scambi:

$$1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 1$$

il primo è scambiato col secondo, il secondo col terzo, il terzo col primo, etc. Lo *shift* ciclico dei tre numeri (il che equivale a posizionare i numeri su una circonferenza e farla ruotare) non cambia la permutazione, per cui le seguenti sono da considersi una sola:

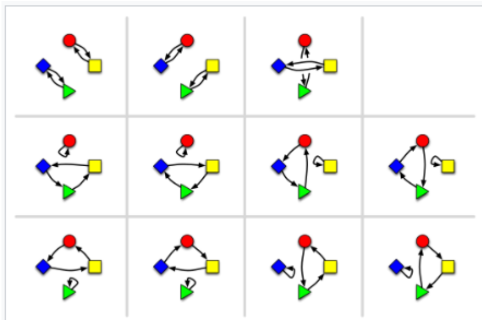
$$(123) \equiv (312) \equiv (231)$$

In generale, il numero di permutazioni cicliche di lunghezza r è $(r-1)!$ Esempio: le permutazioni di lunghezza 3 sono 3!, ma quelle cicliche sono solo $2! = 2$: (123) e (213).

Ogni permutazione si può decomporre in permutazioni cicliche come la seguente:

$$((123)(4)(5)(67))$$

che è composta da $k = 5$ cicli, di lunghezza 3,1,1,2. I cicli di lunghezza unitaria, tipo (4), equivalgono a *punti fissi*, cioè elementi che non vengono toccati dalla permutazione stessa.



Nell'esempio in figura abbiamo la decomposizione ciclica delle permutazioni di 4 oggetti 1234, 3 del tipo $(ab)(cd)$ e 8 del tipo $(abc)(d)$, per un totale di 11.

modello	*permutazioni*	totale
$(\star\star)(\star\star)$	(12)(34),(13)(24),(14)(23)	3
$(\star\star\star)(\star)$	(123)(4),(213)(4) x 4	8

Posto $w_r = (r-1)!$, la «densità relativa» delle permutazioni cicliche è:

$$\frac{w_r}{r!} = \frac{(r-1)!}{r!} = \frac{1}{r}$$

e quindi la generatrice è: [5]

$$W = \sum_{r \geq 1} \frac{x^r}{r} = -\log(1-x) = \log \frac{1}{1-x}$$

Il numero di permutazioni di lunghezza n che si decompongono in k cicli, indicato con $\left[{n \atop k}\right]$, si può estrarre dallo sviluppo in serie:

[5] $\log(1-x) = -\sum_r \frac{x^r}{r}$.

$$\frac{1}{k!}\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^k = \sum_n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!}$$

I numeri $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ si chiamano *numeri di Stirling di prima specie:* ad essi è possibile associare la generatrice bivariata:

$$Z = \sum_k \frac{W^k}{k!} y^k = e^{y\cdot W} = e^{-y\cdot\log(1-x)} = (1-x)^{-y}$$

il cui sviluppo è:

$$Z = \sum_{n,k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n y^k}{n!}$$

Problema. *Quante sono le permutazioni di 7 elementi che abbiano esattamente 3 cicli?*

Soluzione. Dallo sviluppo in serie

$$\frac{(-\log(1-x))^3}{3!} = \cdots + \boxed{1624}\frac{x^7}{7!} + \ldots$$

si trova $\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = 1624$.

Anche i numeri di Stirling di Prima specie, come quelli di II specie, si possono dedurre da espressioni algebriche non esponenziale. La seguente è una delle più notevoli:

$$x^{(n)} = \underbrace{x(x+1)(x+2)\cdots}_{k} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

e lega $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ ai *fattoriali crescenti* $x^{(n)}$ in modo molto simile a come $\left\{ n \atop k \right\}$ era legato ai *fattoriali decrescenti* $x_{(n)}$:

$$x_{(n)} = \underbrace{x(x-1)(x-2)\cdots}_{k} = \sum_k \left\{ n \atop k \right\} x^k$$

Problema. *Calcolare tutti i valori di $\left[{7 \atop k}\right]$, con k ≤7.*

Soluzione. Basta sviluppare la produttoria $x^{(7)}$:

$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) = x^7 + 21x^6 + 175x^5 + 735x^4 + 1624x^3 + 1764x^2 + 720x$

dalla quale si estrae $\left[{7 \atop 1}\right] = 720$, $\left[{7 \atop 2}\right] = 1764$, $\left[{7 \atop 3}\right] = 1624$ (valore già trovato prima), etc.

A.4. Partizioni di dimensione fissata

Problema. *In quanti modi possiamo partizionare un insieme di n elementi in k sottoinsiemi della stessa dimensione?*

Detta $r = \frac{n}{k}$ la dimensione (comune) dei sottoinsiemi, si ha:

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{x^r}{r!}\right)^k = \boxed{\text{c(n)}}\frac{x^n}{n!}$$

e quindi:

$$c(n) = \frac{(r \cdot k)!}{k!(r!)^k}$$

Per $r = 2$, $k = 5$ e $n = r \cdot k = 10$, si ha $c =$945.

A.5. Involuzioni e telefonate

Per *involuzione* si intende una permutazione π tale che $\pi^2 =$ identity. Una involuzione può contenere solo cicli di lunghezza $r = 1$ (*punti fissi*, tipo (a)) o $r = 2$ (*scambi*, tipo : (ab)), per cui:

$$Z = \sum_k \frac{1}{k!}\left(x + \frac{x^2}{2!}\right)^k = e^{x+\frac{x^2}{2!}} = \sum_n \boxed{\text{I(n)}}\frac{x^n}{n!}$$

Problema. *Su un'isola deserta ci sono 8 persone dotate di telefono. Ogni persona può telefonare <u>al massimo</u> ad un'altra persona. Quante sono le possibili chiamate simultanea sull'isola?*

Si tratta di determinare il numero di involuzioni di 8 elementi. Per far questo, basta decomporre $Z = e^{x+\frac{x^2}{2}}$ in serie e prendere il coefficiente di $\frac{x^8}{8!}$:

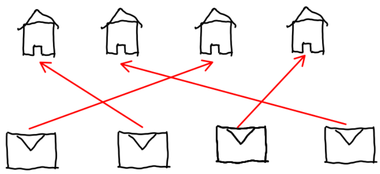
$$e^{x+\frac{x^2}{2}} = \cdots +2620\frac{x^9}{9!} + 764\frac{x^8}{8!} + 232\frac{x^7}{7!} + 76\frac{x^6}{6!} + 26\frac{x^5}{5!} + 10\frac{x^4}{4!} + 4\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^2}{2!} + \frac{x^1}{1!} + 1$$

per cui

$$I(8) = 764.$$

Un problema del tutto equivalente sarebbe: *contare in quanti modi è possibile partizionare un insieme usando sottoinsiemi di 1 o 2 elementi.*

A.6. Derangement: la segretaria distratta



Problema. *Una segretaria ha n lettere e n buste con le intestazioni relative. Ma, essendo molto distratta, combina destinatari e lettere in maniera casuale. Qual è la probabilità che almeno un destinatario riceva la propria lettera?*

La cosa più semplice è calcolare la probabilità $p_n(0)$ che *nessuno* degli n destinatari riceva la propria lettera. L'azione dell'imbustamento della segretaria è equivalente a scegliere una delle permutazioni S_n di n elementi. Soltanto le permutazioni senza *punti fissi* garantiscono che nessuno riceva la propria lettera.

Detto d_n il loro numero, possiamo ricavarlo dallo sviluppo EGF [(6)] :

$$\sum_k \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots\right)^k = e^{\log\left(\frac{1}{1-x}\right)-x} = \frac{e^{-x}}{1-x} = \sum_n d_n \frac{x^n}{n!}$$

Per quanto riguarda la probabilità che nessuno riceva la propria lettera, questa è

$$p_n(0) = \frac{d_n}{n!}$$

per cui conviene usare una serie standard:

$$\tfrac{e^{-x}}{1-x} = \textstyle\sum_n p_n(0)x^n = 1 + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{3x^4}{8} + \tfrac{11x^5}{30} + O\left(x^6\right)$$

Se si osserva la successione dei coefficienti $p_n(0)$ all'aumentare di n:

$$p_n(0) = \{1., 0., 0.5, 0.333333, 0.375, 0.366667\}$$

si scopre che converge ad un valore ben preciso:

$$\lim_{n\to\infty} p_n(0) \approx 0.367879$$

[(6)] Di nuovo, ricordare lo sviluppo del logaritmo naturale: $-\log(1-x) = \sum_{r\geq 1} \frac{x^r}{r}$, ottenibile integrando termine a termine la serie armonica: $\frac{1}{1-x} = \sum_{r\geq 0} x^r$.

Si può dimostrare che questo valore è proprio $\frac{1}{e} = e^{-1}$.

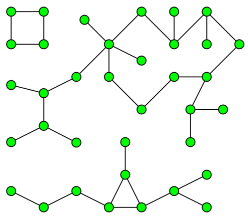
In conclusione, la probabilità *che almeno un destinatario riceva la propria lettera,* nel limite di infiniti destinatari, è

$$1 - p_n(0) \underbrace{=}_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{e} = 0.632121$$

A.7. Grafi connessi

Un grafo è un insieme di punti del piano connessi tra loro da segmenti. Un grafo si dice *connesso* se presi due vertici (a) e (b) esiste un percorso (non-orientato) che porta da a a b.

In figura, un esempio di grafo non connesso, composto da varie parti connesse.



Presi n punti del piano, si chiama *ramo* la connessione tra due punti. I possibili rami sono le $\binom{n}{2}$ coppie che possiamo formare tra n punti.

Un grafo è fatto scegliendo un certo numero di rami. Ne consegue che i possibili grafi i n punti sono in totale $z_n = 2^{\binom{n}{2}}$:[7]

$$z_n = \{1, 1, 2, 8, 64, 1024, etc...\}$$

[7] Queste non è altro che il *numero di sottoinsiemi* estraibili da un insieme di $\binom{n}{2}$ elementi.

Essendo strutture distinguibili, a questi grafi possiamo associare la generatrice esponenziale $Z = \sum_n \frac{z_n}{n!} x^n$.

Soltanto una piccola parte di questi grafi sono *connessi*, mentre la maggior parte sono costruiti assemblando tra loro parti connesse:

$$\{W, WW, WWW, \ldots\}$$

Ricordando la teoria della generatrici esponenziali, a Z possiamo associare una funzione $W = \sum_r \frac{w_r}{r!} x^r$ tale che $Z = e^W = \sum_n \frac{W^n}{n!}$, per cui possiamo ottenere W sviluppando una formula inversa:

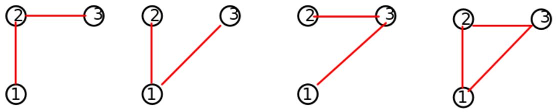
$W = \log(Z) = \log\left(\sum_n \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} x^n\right) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{19x^4}{12} + O\left(x^5\right)$

I valori di w_n li possiamo estrarre moltiplicando per $n!$ i coefficienti di questo sviluppo.

Alcuni valori per $n \geq 0$:

$$w_n = \{0, 1, 1, 4, 38, 728, 26704, etc...\}$$

Esempio. Se $n = 3$ i possibili grafi sono $2^{\binom{3}{2}} = 8$ mentre i grafi connessi sono solo 4.



A.8. Dimostrare identità

Le funzioni generatrici possono essere utili per dimostrare identità di tipo combinatoriale, in maniera compatta ed elegante.

Esercizio. *Dimostrare che, per ogni k, vale l'identità*[8] *:*

$$\sum_r \binom{a}{r}\binom{b}{k-r} = \binom{a+b}{k}$$

Per dimostrarlo basta trovare una funzione generatrice in cui compaiano i coefficienti di Newton $\binom{n}{k}$, tipo questa:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Dimostrazione. Moltiplichiamo i due membri dell'identità per x^k e sommiamo su k:

$$\sum_k \sum_r \binom{a}{r}\binom{b}{k-r} x^k = \sum_k \binom{a+b}{k} x^k$$

Il secondo membro è chiaramente $(1+x)^{a+b}$, mentre il primo membro:

$$\sum_k \sum_r \binom{a}{r}\binom{b}{k-r} x^k = \left(\sum_r \binom{a}{r} x^r\right) \cdot \left(\sum_k \binom{b}{k} x^k\right)$$

e cioè $(1+x)^a \cdot (1+x)^b$. L'identità è provata. □

En passant, se nella nostra identità poniamo $a = b = k = n$, ne otteniamo un'altra ancora più interessante:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2 = \binom{2n}{n}$$

[8] *Detta «identità di Vandermonde»*

Esercizio. *Dimostrare che, per ogni n, vale l'identità:*

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

Dimostrazione. basta prendere

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

derivare entrambi i membri rispetto ad x:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

e porvi $x = 1$. □

A.9. Calcolo di sommatorie

In molti problemi di richiede il calcolo di sommatorie del tipo:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Anche qui possono venirci in aiuto le funzioni generatrici. Se infatti moltiplichiamo la funzione $A(x) = \sum_n a_n x^n$ per $\frac{1}{1-x}$, e raccogliamo i termini corrispondenti alle medesime potenze, troviamo

$$B(x) = \tfrac{1}{1-x} \cdot \textstyle\sum_n a_n x^n = (1 + x + x^2 + \dots) \cdot$$
$$\textstyle\sum_n a_n x^n = a_0 + (a_0 + a_1)\, x + (a_0 + a_1 + a_2)\, x^2 +$$
$$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)\, x^3 + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\, x^4 +$$

$$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)\, x^5 +$$
$$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)\, x^6 +$$
$$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7)\, x^7 + O\left(x^8\right)$$

per cui $B(x)$ è proprio la generatrice di b_n.

Problema. *Calcolare la somma dei quadrati dei numeri naturali da 1 ad n*

Se partiamo dall'onnipresente serie geometrica $\frac{1}{1-x} = \sum_k x^k$ e deriviamo una volta rispetto ad x, otteniamo $\sum_k kx^{k-1}$. Se moltiplichiamo il risultato per x, deriviamo una seconda volta e rimoltiplicamo per x, otteniamo:

$$A(x) = x\frac{d}{dx}(x \cdot \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}) = \sum_k k^2 x^k$$

Calcolando le derivate e sviluppando in serie di potenze, si ha infatti:

$$A(x) = -\frac{x(x+1)}{(x-1)^3} = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + 25x^5 + 36x^6 + O\left(x^7\right)$$

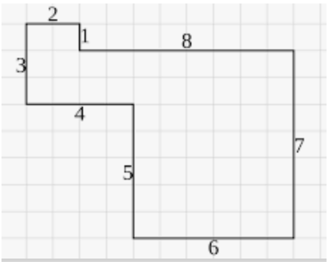
mentre la serie delle somme parziali b_n è:

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x} = -\frac{x(x+1)}{(1-x)(x-1)^3} = x + 5x^2 + 14x^3 + 30x^4 + 55x^5 + 91x^6 + 140x^7 + 204x^8 + 285x^9 + 385x^{10} + 506x^{11} + 650x^{12} + 819x^{13} + 1015x^{14} + 1240x^{15} + 1496x^{16} + 1785x^{17} + 2109x^{18} + 2470x^{19} + O\left(x^{20}\right)$$

A.10. I goligoni

L'idea dei goligoni risale ad un articolo del 1990 di AK Dewdeney, sulle colonne di «Mathematical Recreations».

Si parte da un punto del piano e ci si sposta di ± 1 verso destra/sinistra, poi di ± 2 verso sopra/sotto, e via così aumentando ogni volta di una unità, fino ad arrivare al punto di partenza. La domanda è: quanti sono i goligoni che si possono fare con n passi? (9)



Questo problema si può risolvere in maniera decisamente elegante con metodi algebrici. In particolare, esso ci dà la possibilità di usare le funzioni generatrici anche con potenze negative della variabile x.

Teorema. *Il numero di goligoni è data dal coefficiente c_x del termine costante nell'espansione del prodotto:*

$$Z_x = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right)\dots\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

moltiplicato per il coefficiente c_y del termine costante nell'espansione del prodotto:

$$Z_y = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right)\dots\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)$$

(9) *Si dimostra che si chiudono solo se $n = 8k$.*

Dimostrazione. Basta osservare che il termine costante in Z_x proviene da:

$$x^{\pm 1}x^{\pm 3}x^{\pm 5}\cdots = x^{\pm 1\pm 3\pm 5\cdots\pm(n-1)} = x^0$$

corrispondenti agli spostamenti *dispari* lungo l'asse X, e che il termine costante in Z_y proviene da:

$$x^{\pm 2}x^{\pm 4}x^{\pm 6}\cdots = x^{\pm 2\pm 4\pm 6\cdots\pm n} = x^0$$

corrispondente agli spostamenti *pari* lungo l'asse Y.

La moltiplicazione $c_x \cdot c_y$ rappresentano i modi in chi il goligono si può chiudere. □

Esempio, per n =16, si ha:

$$Z_x = x^{64} + \frac{1}{x^{64}} + x^{62} + \frac{1}{x^{62}} + x^{58} + \frac{1}{x^{58}} + x^{56} + \frac{1}{x^{56}} + x^{54} + \frac{1}{x^{54}} + x^{52} + \frac{1}{x^{52}} + x^{50} + \frac{1}{x^{50}} + 2x^{48} + \frac{2}{x^{48}} + 2x^{46} + \frac{2}{x^{46}} + 2x^{44} + \frac{2}{x^{44}} + 2x^{42} + \frac{2}{x^{42}} + 3x^{40} + \frac{3}{x^{40}} + 3x^{38} + \frac{3}{x^{38}} + 3x^{36} + \frac{3}{x^{36}} + 4x^{34} + \frac{4}{x^{34}} + 5x^{32} + \frac{5}{x^{32}} + 4x^{30} + \frac{4}{x^{30}} + 4x^{28} + \frac{4}{x^{28}} + 5x^{26} + \frac{5}{x^{26}} + 5x^{24} + \frac{5}{x^{24}} + 6x^{22} + \frac{6}{x^{22}} + 5x^{20} + \frac{5}{x^{20}} + 6x^{18} + \frac{6}{x^{18}} + 7x^{16} + \frac{7}{x^{16}} + 7x^{14} + \frac{7}{x^{14}} + 6x^{12} + \frac{6}{x^{12}} + 7x^{10} + \frac{7}{x^{10}} + 8x^{8} + \frac{8}{x^{8}} + 7x^{6} + \frac{7}{x^{6}} + 7x^{4} + \frac{7}{x^{4}} + 7x^{2} + \frac{7}{x^{2}} + 8$$

e, analogamente, per Z_y:

$$Z_y = x^{72} + \frac{1}{x^{72}} + x^{68} + \frac{1}{x^{68}} + x^{64} + \frac{1}{x^{64}} + 2x^{60} + \frac{2}{x^{60}} + 2x^{56} + \frac{2}{x^{56}} + 3x^{52} + \frac{3}{x^{52}} + 4x^{48} + \frac{4}{x^{48}} + 5x^{44} + \frac{5}{x^{44}} + 6x^{40} + \frac{6}{x^{40}} + 7x^{36} + \frac{7}{x^{36}} + 8x^{32} + \frac{8}{x^{32}} + 9x^{28} + \frac{9}{x^{28}} + 10x^{24} + \frac{10}{x^{24}} + 11x^{20} + \frac{11}{x^{20}} + 12x^{16} + \frac{12}{x^{16}} + 13x^{12} + \frac{13}{x^{12}} + 13x^{8} + \frac{13}{x^{8}} + 13x^{4} + \frac{13}{x^{4}} + 14$$

per cui

$$c_x c_y = 8 \cdot 14 = 112.$$

Questi numeri crescono molto velocemente col numero di passi n.

Esempio, per n=64, il numero di goligoni è

510696155882492 (!)[10]

[10] Mi raccomando: questo è un vero punto esclamativo, non il fattoriale ...

Bibliografia

(a) Herbert S. Wilf, «generatingfunctionology», `https://www2.math.upenn.edu/~wilf/gfology2.pdf`

(b) Toufik Mansour, «Combinatorics Of Set Partitions»

(c) Louis Comtet, «Advanced Combinatorics»

(d) Flajolet-Sedgewick, «Analytic Combinatorics»

(e) Ilan Vardi, «Computational Recreations in Mathematica», Addison-Wesley Publishing Company, 1991

(f) Roberto Dvornicich e Giovanni Gaiffi (dispense del corso *Matematica Discreta*)

(g) Tuppa-Supitti «Analisi Combinatoria» (un *pdf* reperibile in Rete da cui ho preso alcuni esercizi dell'ultimo capitolo)

(h) R. Stanley, «Enumerative Combinatorics», Vol 1 &2, Cambridge Univ. Press

(i) R. Stanley, «Catalan Numbers», 2015, Cambridge Univ. Press