Il Frattale di Mandelbrot

versione estremamente rustica, 2003 MA

La funzione permanenza[]

La seguente funzione esegue il seguente calcolo iterativo: z=z^2+z0, partendo da z=0 e fissando z0=x+i*y. Il calcolo iterativo termina per una delle seguenti due cause: 1) il punto z=(x,y) esce dal cerchio trigonometrico, 2) il numero di iterazioni ha superato il valore maxIter. Al termine del calcolo, la funzione ritorna il numero di cicli effettivamente fatti, la "permanenza del punto" (come la chiamo io).

La formula iterativa scelta e' soltanto una delle tante che si potrebbero scegliere ed e' quella che corrisponde al famoso insieme di Mandelbrot. I punti che escono con permanenza =0 si suppono fuori dell'insieme. Naturalmente, occorre che (x,y) sia nel cerchio trigonometrico, altrimenti la permanenza risulta immediatamente nulla, come puoi facilmente verificare.

```
In[1]:= permanenza[x_, y_, maxIter_] := Module[ {z = 0 + I * 0, z0 = x + I * y, k = 0},
         While[  k < maxIter  && Abs[z] < 1,
              z = z^2 + z0;
              k = k + 1;
         ];
         k
        ]
```

Esempio: permanenza di alcuni punti

```
In[2]:= permanenza[0.1, 0.8, 100]

Out[2]= 2
```

Commenti: la caoticita'

Quel che e' strano di funzioni come permanenza(x,y) e' che punti molto vicini (e senza apparente spiegazione) possono avere "permanenze" radicalmente diverse. E' un tipo di funzione che viene qualche volta definita "a carattere caotico", o "altamente non lineare". Se io misuro la temperatura T(x,y) di una piastra calda in vari punti (x,y), non mi aspetto drammatiche differenze tra un punto e quello infinitamente vicino. "Natura non facit saltus", dicevano gli antichi. La parte della Matematica moderna che studi i "grandi e improvvisi salti" si chiama Teoria delle Catastrofi e, forse, ti immagini anche perche'.

Esplorazione dell'intero insieme

Per ottenere una rappresentazione grafica dell'insieme di Mandelbrot (simulando un po' quello che fanno i veri programmi per diagrammare frattali) la prima cosa da fare e' calcolare la permanenza di una matrice quadrata di punti del piano, corrispondente al quadrato 2x2 che ricopre la circonferenza trigonometrica.

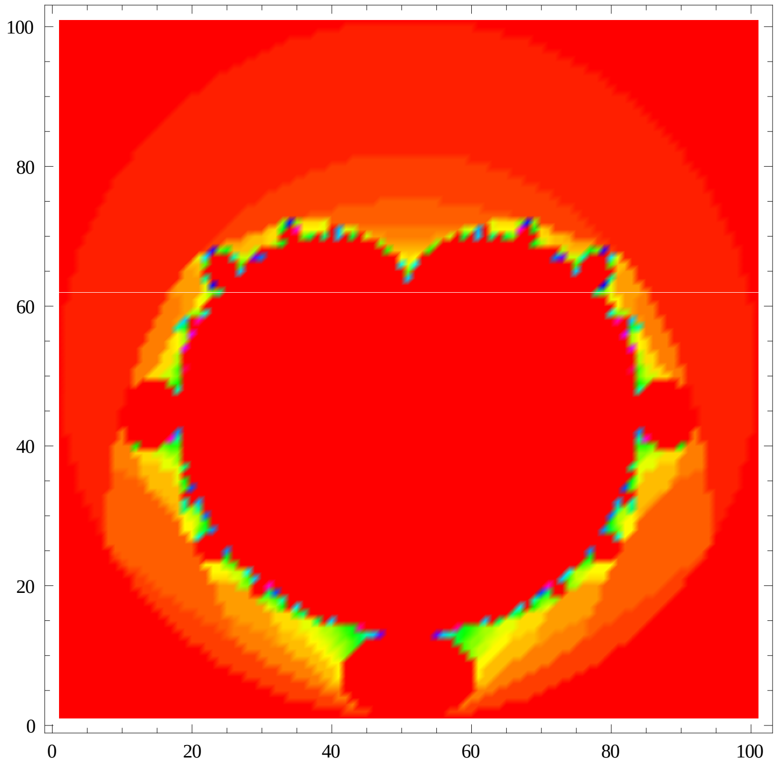
Nel seguente esempio, prendo maxIter=50 ed suddivido il quadrato in pixel di lato 0.02.

```
In[3]:= M = Table[ permanenza[x, y, 50], {x, -1, 1, 0.02}, {y, -1, 1, 0.02}];
```

A questo punto, M e' una matrice quadrata contenente, nella cella (x,y), la permanenza del punto (x,y) stesso. La funzione di *Mathematica* piu' adatta per ottenere un plot e' ListDensityPlot. Questa funzione assegnera' un colore ad ogni pixel, in maniera conveniente.

In[4]:=
```
ListDensityPlot[M, ColorFunction → Hue]
```

Out[4]=



Zoom su singole zone

Volendo, posso esplorare anche solo piccole zone del piano complesso. In questo caso, esploro un rettangolino della zona centrale: x in (-0.1,0.1) e y in (0.5,0.7).

In[5]:=
```
M = Table[ permanenza[x, y, 50], {x, -0.1, 0.1, 0.005}, {y, 0.5, 0.7, 0.005}];
ListDensityPlot[M, ColorFunction → Hue]
```

Out[6]=